

УДК 621.391 ББК 32.811 П 22

DOI: 10.31673/2412-9070.2022.024045

Л. П. КЛОБУКОВА, здобувач;

А. І. ТОРОШАНКО, здобувач;

Державний університет телекомунікацій, Київ

## АСИМПТОТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ БАГАТОКАНАЛЬНИХ СИСТЕМ ДОСТУПУ З ОРТОГОНАЛЬНОЮ ФІЛЬТРАЦІЄЮ

*Розглянуто цифрові схеми модуляції, в яких використовується певна кількість ортогональних підносійних з еквідистантним розташуванням (так звана технологія OFDM). Як науково-технічне підґрунтя проблеми взято теорію радіотехнічних кіл та сигналів. Проаналізовано спектри дискретних сигналів, досліджено вплив порушень умов теореми Котельникова та асимптотику похибок відновлення вихідних неперервних сигналів. Розроблено методи формування складених сигналів із довільним частотним рознесенням підносійних. Показано, що при узгодженні величини частотного зсуву базисних функцій розкладання в ряд та ширини спектра основної та бічних пелюсток у спектрі вихідного сигналу можна розраховувати на мінімальний вплив взаємних завад та міжсимвольної інтерференції складеного сигналу. Встановлено, що метод ортогонального частотного мультиплексування каналів (OFDM) дає змогу значно підвищити пропускну здатність системи безпроводового зв'язку. Крім того, у разі динамічної зміни навантаження в безпроводових мережах мінімізується вплив частотних колізій та збільшення рівня внутрішньосистемних завад. Графічний аналіз результатів розкладання в ряд за квазіортогональною системою базисних функцій свідчить, що похибки відновлення вихідних сигналів можуть досягати неприйнятних значень. Установлено також, що в разі розкладання в неортогональний ряд із більшою кількістю членів ситуація з відновленням вихідних сигналів стає трохи придатнішою, але ніяких гарантій монотонного покращення ситуації з похибками відновлення не можна дати в принципі. Ця проблема потребує додаткових досліджень аналітичного характеру.*

**Ключові слова:** технологія OFDM; теорія радіотехнічних кіл та сигналів; теорема Котельникова; похибки відновлення вихідних неперервних сигналів.

*Цією статтею ми починаємо цикл публікацій із методів ортогонального та квазіортогонального частотного розділення каналів у безпроводових системах та мережах зв'язку. Основний напрям наукових досліджень — упровадження методів теорії радіотехнічних кіл та сигналів. У запропонованій статті розглянуто методи аналізу асимптотичних характеристик систем зв'язку та залежності похибок подання сигналів з обмеженим спектром та з обмеженою довжиною від числа складових ряду Котельникова.*

### ВСТУП

Принцип ортогонального мультиплексування з ортогональним частотним розділенням каналів для обміну даними з прийнятною швидкістю через довільні середовища передавання, з мінімальними міжканальними і міжсимвольними завадами було запропоновано кілька десятиліть тому. Він дістав назву *Orthogonal Frequency Division Multiplexing* (OFDM) [1]. Після розвитку та широкого впровадження цифрового опрацювання сигналів технологічною базою OFDM стали майже виключно цифрові фільтрові системи на основі швидкого перетворення Фур'є або гребінок смугових фільтрів на основі частотної вибірки.

Далі було запропоновано численні покращання OFDM [2]. Усі пропозиції мали інтуїтивний характер, а обґрунтування не визначалися скільки-небудь узагальненим, строго математичним підґрунтям. Тому в запропонованій статті основну увагу приділено саме асимптотичним характеристикам систем з OFDM, які досягаються зі збільшенням кількості парціальних каналів із прагненням до нескінченності.

Основною перевагою OFDM перед методами модуляції з однією носійною частотою є розширені можливості адаптації до змінних умов каналу передавання даних — оптичного, електричного проводового або безпроводового тощо. До змінних умов можна віднести швидкі або повільні завмирання в середовищі поширення, багатопроменеве поширення, яке стає причиною частотно-селективних завмирань тощо.

В одночастотних системах передавання даних для боротьби з такими негативними явищами потрібні складні методи корекції парціальних (аналогових або цифрових) фільтрів або застосування трансверсальних фільтрів із тонким та швидким налаштуванням комплексних коефіцієнтів підсилення у відведеннях. Водночас вирівнювання характеристик каналів у системах із OFDM значно спрощується, оскільки маємо оперувати з множиною вузькосмугових сигналів із порівняно повільними функціями модуляції.

© Л. П. Клубукова, А. І. Торошанко, 2022

Існують також інші переваги OFDM-систем, передусім — висока спектральна ефективність порівняно з іншими схемами модуляції, підвищена стійкість до деяких найбільш поширених та небезпечних видів завад системам та засобам електрозв'язку [3]. Математичний опис та аналіз цих характеристик буде здійснено в наступній статті. Також там планується проаналізувати принципові недоліки, притаманні саме OFDM-системам, та шляхи їх усунення. У представленій статті основну увагу буде приділено саме асимптотичним характеристикам багатоканальних систем зв'язку.

## ОСНОВНА ЧАСТИНА

### Математичне підґрунтя методу OFDM

У монографіях і статтях [1; 4–6] зазначається, що OFDM концептуально є спеціалізованим методом мультиплексування з розділенням каналів та ортогональними сигналами. Стверджується, що під час ортогоналізації підносійних перехресні завади між парціальними каналами усуваються. Відповідно, захисні інтервали між носійними не потрібні. На жаль, це твердження є справедливим лише в разі прагнення числа носійних до нескінченності.

Насправді, практичний інтерес становить не граничний результат  $N_{fc} \rightarrow \infty$ , а швидкість збіжності ряду, в який розкладається довільна сигнальна функція  $g(t)$  у процесі необмеженого збільшення кількості членів розкладання:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n \rightarrow -N}^N c_n g(t),$$

де  $c_n$  — коефіцієнти ряду, який є частинним випадком узагальненого ряду Фур'є:

$$g(t) = c_{-\infty} \varphi_{-\infty}(t) + \dots + c_{-n} \varphi_{-n}(t) + \dots + c_0 \varphi_0(t) + \dots + c_1 \varphi_1(t) + \dots + c_n \varphi_n(t) + \dots + c_{\infty} \varphi_{\infty}(t), \quad (1)$$

де  $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt < \infty$  — умова збіжності ряду (1),

$$c_n = \frac{1}{[\varphi_n]^2} \int_{-a}^a g(t) \varphi_n(t) dt \quad (2)$$

— коефіцієнти узагальненого ряду Фур'є (1).

Щоб здобути асимптотичні оцінки швидкості збіжності ряду (1) потрібно, по-перше, визначитися з видом сигнальної функції  $g(t)$ , а по-друге, конкретизувати вид розкладання.

Сигнальну функцію визначити досить просто: це прямокутний імпульс довжиною  $\tau$ , розміщений на часовій осі на інтервалі  $-\frac{\tau_p}{2} \leq t \leq \frac{\tau_p}{2}$ . Амплітудно-частотний спектр такого імпульсу має вигляд

$$G(f) = \left| G_1(0) \operatorname{sinc} \left( \frac{2\pi f \tau_p}{2} \right) \right|, \quad (3)$$

де функція  $\operatorname{sinc}(x) = \sin(x)/x$ . Якщо вважати, що довжина імпульсу дорівнює одиниці, а амплітуда дорівнює одному вольту, енергія, відповідно, також буде одиничною, і  $G(0) = 1$ . Графік функції  $\operatorname{sinc}(x)$  зображено на рис. 1, а графік амплітудно-частотного спектра сигналу у вигляді прямокутного імпульсу — на рис. 2.

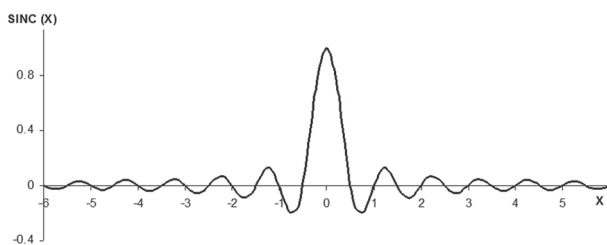


Рис. 1. Графік функції  $\operatorname{sinc}(x)$

Більш тонким моментом є вибір системи функцій, за якою здійснюється розкладання в ряд. Не вдаючись у подробиці детального викладення теорії радіотехнічних кіл та сигналів, зауважимо, що найбільш простим, зручним і водночас довершеним є розкладання в ряд за ортонормованою системою функцій.

Іншою проблемою є вибір такої системи функцій, яка була б інваріантною до зсуву часу затримки. До таких систем належить, наприклад, система гармонічних функцій — синуси та косинуси. Однак обчислення коефіцієнтів розкладання за формулою (2) є трудомістким та неоднозначним завданням, особливо під час розкладання нестационарних функцій.

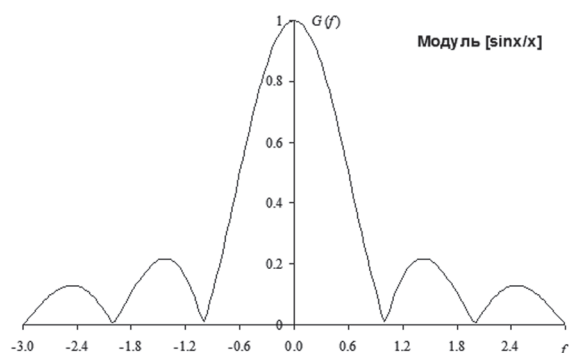


Рис. 2. Графік нормованого амплітудно-частотного спектра

У теорії та практиці аналізу електричних сигналів широко використовується теорема Котельникова, яка формулюється так:

якщо найвища частота у спектрі функції  $g(t)$  менша за  $f_{\max}$ , то функція  $g(t)$  повністю визначається послідовністю своїх значень у моменти, що відстоять один від одного не більш ніж на  $1/2f_{\max}$  секунд.

Припустимо, що наша функція, яка підлягає розкладанню в ряд Котельникова, має найвищу частоту в спектрі, що дорівнює  $f_{g\max}$ . Тоді відповідно до цієї теореми функцію  $g(t)$  можна розкласти в ряд

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{n}{2f_{g\max}}\right) \frac{\sin[2\pi f_{g\max}(t - n/2\pi f_{g\max})]}{2\pi f_{g\max}(t - n/2\pi f_{g\max})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n\Delta t)\varphi_n(t). \quad (4)$$

Графік вихідного (неперервного) сигналу та послідовність дискретних відліків, узятих із постійним інтервалом дискретизації, зображено на рис. 3.

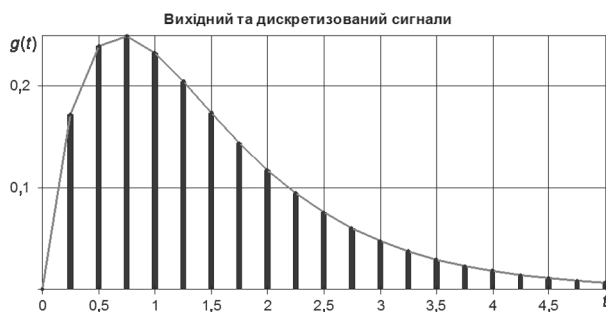


Рис. 3. Неперервний сигнал та послідовність його дискретних відліків

Отже, ряд Котельникова точно визначає заданий сигнал у точках відліку, оскільки коефіцієнтами ряду є самі вибірки з функції, тобто відліки сигналу (рис. 4).

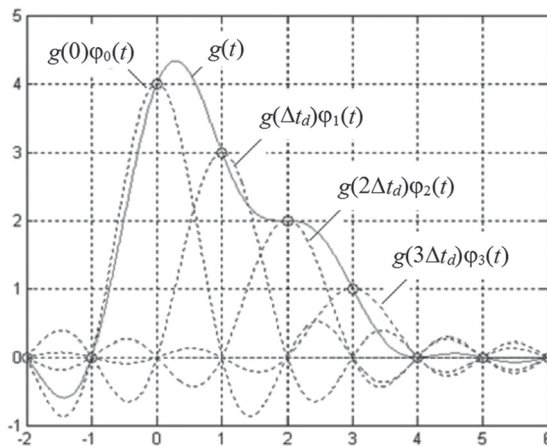


Рис. 4. Відновлення неперервного сигналу за його дискретними відліками

Звертаючись до прийнятої моделі сигналу  $g(t)$ , можна помітити, що діапазон існування його спектра теоретично є нескінченним, а отже, вибрана частота дискретизації не задовольняє умови теореми Котельникова. Відповідно, частина інформації, яка містилася в неперервному сигналі, під час дискретизації губиться назавжди.

Безперечно, що величина втрат інформації залежить від частоти дискретизації, тому за деякої достатньо високої частоти  $f_{g\max}$  можна нехтувати цими втратами. Однак зрозуміло, що з підвищенням частоти дискретизації зростають вимоги до ширини смуги та відповідної пропускну здатності каналу зв'язку. Тому завдання вибору частоти дискретизації, у разі якої похибка відновлення вихідного сигналу за дискретними відліками задовольнятиме вимоги якості зв'язку, є, безумовно, актуальним.

Логічно припустити, що потрібно збільшувати частоту дискретизації з огляду на розподіл енергії у спектрі вихідного (неперервного) сигналу. Беручи інтеграл від квадрата амплітудного спектра (3), встановлюємо такі кількісні параметри розподілу:

- перша (основна) пелюстка в частотному діапазоні від  $-1/\tau_p$  до  $1/\tau_p$  вміщує 90,3% енергії;
- друга (перша бічна) пелюстка від  $1/\tau_p$  до  $2/\tau_p$  — майже 4,7% енергії;
- третя (друга бічна) пелюстка від  $2/\tau_p$  до  $3/\tau_p$  — приблизно 1,67% енергії.

Отже, для задовільного відновлення форми сигналу достатньо враховувати 3-4 пелюстки у спектрі.

Слід зауважити, що швидкість спадання рівнів бічних пелюсток залежить від форми сигналу. Наприклад, імпульс трикутної форми має спектр виду  $G_{\Delta}(f) = \left| G_{1\Delta}(0) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{2\pi f\tau_p}{2}\right) \right|$ , а в першій (основній) пелюстці зосереджено 99,7% загальної енергії сигналу. У літературі зазначається, що для того, аби здобути задовільну якість відновлення сигналу, достатньо враховувати діапазон частот, який вміщує тільки першу пелюстку. Однак при цьому не слід забувати, що трикутний імпульс довжиною  $\tau_{\Delta}$  має вдвічі меншу енергію, ніж прямокутний імпульс тієї самої довжини  $\tau_p = \tau_{\Delta}$ , тому якість відновлення сигналу, яка виражається через помилки відновлення, буде нижчою за очікувану.

### Науково-технічні засади відновлення неперервного сигналу

Відновлення неперервного сигналу здійснюється за формулою (4). Однак, якщо спектр сигналу обмежується, а помилками відновлення нехтують, можна замінити точне розкладання (4) приблизним виразом:

$$g(t) = \sum_{n=0}^{N-1} g\left(\frac{n}{2f_{g\max}}\right) \frac{\sin[2\pi f_{g\max}(t - n/2\pi f_{g\max})]}{2\pi f_{g\max}(t - n/2\pi f_{g\max})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n\Delta t)\varphi_n(t). \quad (5)$$

Обмежена кількість дискретних відліків  $N$ , які укладаються на скінченному інтервалі часу  $T$ , розраховується за формулою:

$$N = \frac{T}{\Delta t_d} + 1 = 2f_{g\max}T + 1. \quad (6)$$

Інтуїтивно ясно, що помилка відновлення сигналу в разі обмеження кількості його відліків  $N$  буде тим меншою, чим більша кількість доданків враховується під час підсумовування.

Оцінимо якісно помилку  $|\varepsilon(t)| = |g_\varepsilon(t) - g(t)|$  з огляду на такі міркування [7-9]:

- усі складові ряду (5) звертаються в нуль у точках  $t_k = k\Delta t_d$ ;
- ряд (5) є функціональним, тому збільшення кількості членів монотонно збігається до функції  $g(t)$ ;
- помилки апроксимації  $\varepsilon(t)$  є гладкими функціями відстані між дискретними відліками.

Через наявність бічних пелюсток спектра неперервного сигналу, вищого за частоту  $f_{g\max}$  (теоретично до нескінченної частоти), також виникають додаткові помилки відновлення вихідного сигналу. Оскільки форма та розміри бічних пелюсток спектра неперервного сигналу залежать від безлічі факторів впливу з невідомими апіорі характеристиками, то єдиним конструктивним методом оцінювання помилок є статистичний метод. Середньоквадратичне відхилення похибки відновлення вихідного сигналу можна подати таким співвідношенням:

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df - \int_{-f_{g\max}}^{f_{g\max}} |G(f)|^2 df \right]^{1/2}}{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df \right]^{1/2}}. \quad (7)$$

Якщо задана похибка, середньоквадратичне відхилення якої не більше за максимально припустиме, можна (наприклад, методом послідовних наближень) визначити необхідну граничну частоту  $f_{g\max}$  і, відповідно, період дискретизації  $\Delta t_d = 1/2f_{g\max}$ .

Ми не розглядаємо додаткові похибки відновлення функції  $g(t)$  через «розмивання» частотних характеристик фільтрів відновлення, залишаючи це завдання для наступних статей заявленого циклу.

### Відмінності ортогонального та квазіортогонального розкладання у ряд

Розглянемо залежності похибок у разі ортогонального розкладання прямокутного імпульсу кінцевої довжини  $-\frac{\tau_p}{2} \leq t \leq \frac{\tau_p}{2}$  у ряд із різною (зростаючою) кількістю членів. Беручи до уваги монотонну збіжність суми ряду до точного значення зі збільшенням кількості членів ряду, розглянемо лише кілька прикладів.

#### А. Ортогональні розкладання.

Відстань за частотою між сусідніми членами ряду вибираємо такою, що дорівнює  $\Delta f = 2/\tau_p$ . Розкладання прямокутного імпульсу в ряд, обмежений п'ятьма членами, наведено на рис. 5. Отже, умова ортогональності дотримується: бічні пелюстки парціальних спектрів перетинаються в точках, де їх значення сумісно дорівнюють нулю.

Сумарний сигнал (рис. 6) помітно відрізняється від вихідного сигналу — прямокутного імпульсу. Для порівняння на рис. 7 та рис. 8 наведено графіки розкладання в ряд з 11-ма членами та 21-м членом.

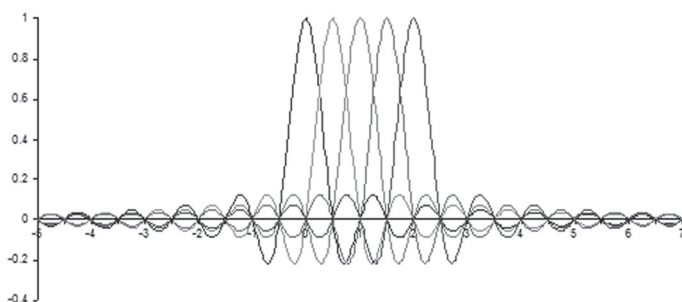


Рис. 5. Графік розкладання в ряд із п'ятьма членами

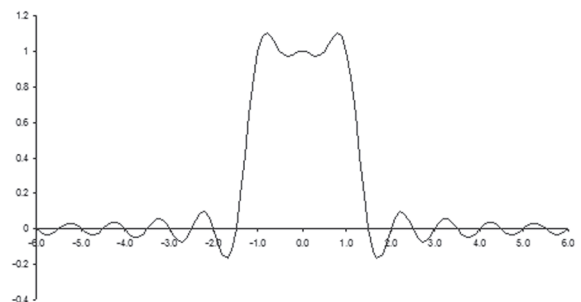


Рис. 6. Графік суми ряду

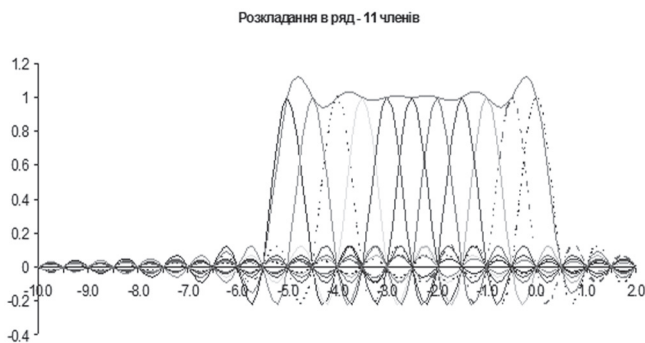


Рис. 7. Графіки 11-ти членів розкладання



Рис. 8. Графіки 21-го члена розкладання

Як бачимо, ортогональність розкладання зберігається, а отже, слід очікувати мінімальних похибок відновлення сигналу.

**Б. Неортогональні розкладання.**

Частотний зсув між сусідніми членами ряду вибираємо таким, що дорівнює  $\Delta f = 1/\tau_p$ , тобто умова теореми Котельникова не дотримується. Отже, ортогональність розкладання також не дотримується, хоча інваріантність до часового зсуву, зумовлена властивостями базисних функцій розкладання, зберігається. Розкладання прямокутного імпульсу в ряд, обмежений п'ятьма членами, зображено на рис. 9. Оскільки умова ортогональності не дотримується, бічні пелюстки парціальних спектрів перетинаються в точках, де їх значення є довільними та не дорівнюють нулю.

Цілком відповідно до порушень умов ортогональності підсумовування членів ряду дає незадовільні результати (рис. 10) стосовно похибок відновлення сигналу.

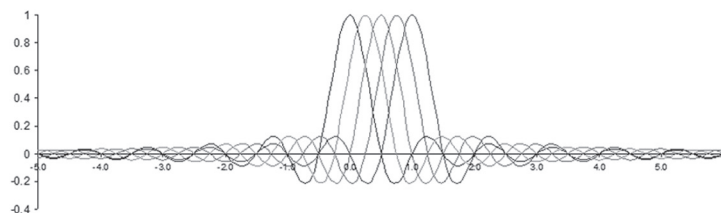


Рис. 9. Розкладання в ряд без дотримання умов теореми Котельникова (умови ортогональності не дотримуються)

Під час розкладання в неортогональний ряд із більшою кількістю членів ситуація стає трохи придатнішою, але ніяких гарантій монотонного покращання ситуації з похибками відновлення не можна дати в принципі. Графіки неортогонального розкладання в ряд з 11-ма членами та відновленого сигналу наведено відповідно на рис. 11 та рис. 12.

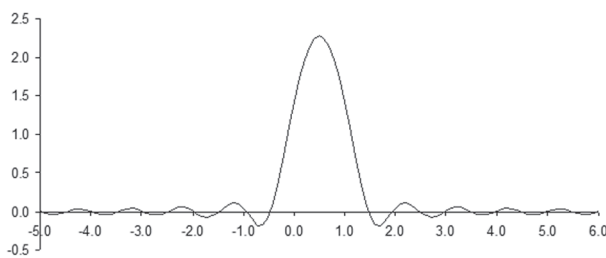


Рис. 10. Графік сумарного сигналу (неортогональне розкладання в ряд, похибки відновлення стають не контрольованими)

Завершуючи графічний аналіз розкладання в ряд із різною строгістю дотримання умов теореми Котельникова, зазначимо, що ключовою вимогою є не стільки вибір якомога більшої частоти дискретизації, скільки дотримання цілочисельності співвідношень між частотою дискретизації та шириною основної та бічних пелюсток спектра сигналу [10]. Результати подальших досліджень похибок дискретизації та відновлення вихідних сигналів будуть репрезентовані в наступних статтях.

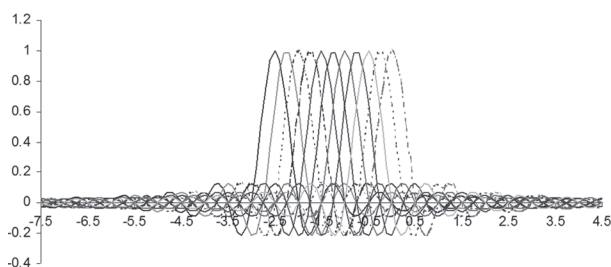


Рис. 11. Графіки базисних функцій розкладання вихідного сигналу (умови ортогональності не дотримуються)

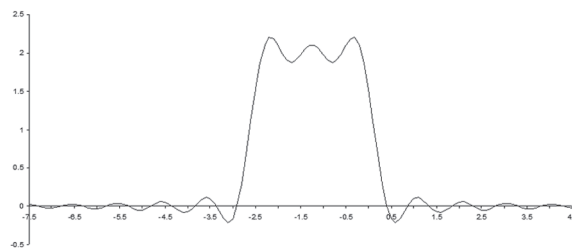


Рис. 12. Графік відновленого вихідного імпульсного сигналу (нерівномірності вершини, рівень коливань бічних пелюсток мають випадковий характер і не контролюються)

## ВИСНОВКИ

1. У статті проаналізовано принципові особливості формування та застосування сигналів специфічного виду — OFDM-сигналів. Проблему розглянуто з позицій теорії радіотехнічних кіл та сигналів. Для безпроводових мереж та систем зв'язку такий підхід вважається найбільш теоретично обґрунтованим та перспективним. Завдяки йому з'являються можливості виводити рівняння та формули в замкненій формі, з використанням яких можна діставати асимптотичні кількісні характеристики технічних систем. На нашу думку, інші підходи є не настільки перспективними, оскільки здобути за їх допомогою результати не мають узагальненого характеру і аж ніяк не дають гарантій упевненості в їх чутливості та стійкості.

2. У подальшому планується розвивати далі регулярну теорію детермінованого та статистичного оцінювання похибок методів ортогонального та квазіортогонального частотного розділення селективних каналів безпроводового зв'язку.

## Список використаної літератури

1. **Chang R. W.** *Synthesis of Band-Limited Orthogonal Signals for Multichannel Data Transmission* // *BSTJ*, 1966. P. 1775–1796.

2. **Ballal B. R., Chadha A., Satam N.** *Orthogonal Frequency Division Multiplexing and its Applications* // *International Journal of Science and Research (IJSR)*, India Online. January 2013. Vol. 2, Issue 1. [www.ijsr.net](http://www.ijsr.net)

3. **Lowery A. J.** *Spectrally efficient optical orthogonal frequency division multiplexing*. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2020. 378(2169).

4. *Advanced Antenna Systems for 5G Network Deployments: Bridging the Gap Between Theory and Practice* / H. Asplund, D. Astely, P. von Butovitsch [et al.]. 2020. 740 p.

5. **Kavehrad M., Sakib Chowdhury M. I., Zhou Zhou.** *Short Range Optical Wireless Theory and Applications* // Publisher: Wiley, 2016. 288 p.

6. **Kavehrad M., Sakib Chowdhury M. I., Zhou Zhou.** *Ch. 6 Orthogonal Frequency-Division Multiplexing (OFDM) for Indoor Optical Wireless Communications*. Publisher: Wiley, 2016.

7. **Dogukan A. T., Basar E.** *Orthogonal frequency division multiplexing with power distribution index modulation* // *Electronics Letters*, 15th October 2020. Vol. 56, No. 21. P. 1156–1159.

8. **Caputo A. C.** *Digital Video Surveillance and Security* Butterworth-Heinemann, 2-nd Ed., 2014. 440 p.

9. *Orthogonal Frequency Division Multiplexing Techniques Comparison for Underwater Optical Wireless Communication Systems* / J. Lian, Y. Gao, P. Wu, D. Lian // *Sensors* 2019. 19, 160. P. 1–19.

10. *Wireless MEMS Networks and Applications* / Deepak Uttamchandani (Ed.) - Woodhead Publishing, The Officers' Mess Business Centre, Royston Road, Duxford, CB22 4QH, United Kingdom, 2017 Elsevier Ltd. 267 p

L. P. Klobukova, A. I. Toroshanko

**ASYMPTOTIC CHARACTERISTICS OF MULTICHANNEL ACCESS SYSTEMS WITH ORTHOGONAL FILTERATION**

The proposed article deals with digital modulation schemes that use a certain number of equidistant orthogonal subcarriers (the so-called OFDM technology). The theory of radio engineering chains and signals is used as the scientific and technical basis of the problem. The spectra of discrete signals were analysed, the influence of violations of the conditions of Kotelnikov's theorem and the asymptotics of the recovery errors of the original continuous signals were investigated. Methods of forming composite signals with arbitrary frequency difference of subcarriers have been developed. It is shown that when the amount of frequency shift of the basic series decomposition functions and the width of the spectrum of the main and side lobes in the spectrum of the output signal are matched, it is possible to count on the minimal influence of mutual interference and intersymbol interference of the composite signal. It was established that the method of orthogonal frequency multiplexing of channels (OFDM) allows to significantly increasing the bandwidth of the wireless communication system. In addition, with dynamic load changes in wireless networks, the impact of frequency collisions and an increase in the level of intra-system interference is minimized. Graphical analysis of the results of the series expansion on the quasi-orthogonal system of basis functions shows that the errors of restoration of the original signals can reach unacceptable values. It was also established that when expanding into a non-orthogonal series with a larger number of members, the situation with the restoration of the original signals becomes a little more suitable, but no guarantees of monotonous improvement of the situation with restoration errors can be given in principle. This problem requires additional analytical research.

**Keywords:** OFDM technology; the theory of radio technical contours and signals; Kotelnikov's theorem; restoration errors of initial signals.