УДК 621.39

О. Н. ТКАЧЕНКО, канд. техн. наук, доцент,
А. П. БОНДАРЧУК, канд. техн. наук, доцент,
Государственный университет телекоммуникаций, Киев

ОЦЕНКА СТАЦИОНАРНОЙ СРЕДНЕЙ ОЧЕРЕДИ В СИСТЕМЕ С ОТНОСИТЕЛЬНЫМИ ПРИОРИТЕТАМИ

Рассмотрена система $M|GJ|1|\infty$ с относительными приоритетами. Проанализирована задача нахождения нижней оценки стационарного среднего времени ожидания начала обслуживания требования при дисциплине преимущественного обслуживания наикратчайшего требования без прерывания обслуживания при заданных первом и втором моментах длины требования.

Ключевые слова: система; требование; очередь; время; приоритет; ожидание; длина; обслуживание; прерывание; оценка.

Введение

Предположим, что можно выбрать порядок обслуживания требований различных приоритетов, считая, что прерывание обслуживания не допускается. Известно, что в случае конечного числа требований в системе или, что то же самое, среднего времени ожидания начала обслуживания, порядок обслуживания заключается в преимущественном обслуживании требований из приоритетной группы с наименьшей средней длиной требований.

Основная часть

Пусть A — любое измеримое множество $[0,\infty)$. Тогда $\lambda\int_A m_x w_x^* dF(x) \ge d(A)$, причем равенство достигается в том случае, когда любое требование с приоритетом из множества A имеет относительный приоритет над любым требованием с приоритетом из $\bar{A}$, независимо от дисциплины обслуживания внутри каждой группы приоритетов A и $\bar{A}$. Здесь w_x^z — стационарное среднее время ожидания начала обслуживания требования приоритета x при произвольной дисциплине обслуживания без прерывания; $d(A)$ — некоторая функция множества A. Таким образом, и в случае непрерывных приоритетов минимальное значение стационарной средней очереди получается, если приоритеты расположены в порядке возрастания средних длин требований, т. е. m_x — неубывающая функция.

Справедливы также следующие утверждения:

• в системе $M|GJ|1|\infty$ без прерывания обслуживания дисциплина преимущественного обслуживания наикратчайшего требования без прерывания обслуживания является оптимальной в смысле минимальности стационарной средней очереди;

• в системе $M|GJ|1|\infty$ с относительными приоритетами (напомним, что m_x, по предположению — неубывающая функция) верхнюю оценку для стационарного среднего времени ожидания начала обслуживания можно получить из сравнения с дисциплиной FIFO, т. е.

$$w_n \le \frac{\lambda m_{(2)}}{2(1-p)}.$$

Отметим, что эта оценка достигается на последовательности распределений, сходящейся к вырожденному $\Delta_m(x)$, причем даже для дисциплины преимущественного обслуживания наикратчайшего требования без прерывания обслуживания.

Рассмотрим теперь задачу нахождения нижней оценки стационарного среднего времени ожидания начала обслуживания требования при дисциплине преимущественного обслуживания наикратчайшего требования без прерывания обслуживания при заданных первом и втором моментах длины требования. Для простоты изложения положим $\lambda = 1$. Тогда $m = p$,

$$w_{(1)} = \frac{m_{(2)}}{2}\int_0^\infty \left(1-\int_0^x y\,dF(y)\right)^{-2} dF(x) = \frac{m_{(2)}}{2}\tilde{w}. \tag{1}$$

Как известно, семейство функций распределения с ограниченными первым и вторым моментами компактно в смысле слабой сходности, причем если $F^{(n)}(x) \Rightarrow F(x)$ и $m_{(2)}^{(n)} \to m_{(2)}^*$, то $m^{(n)} \to m$, но $m_{(2)} \le m_{(2)}^*$. Если $F^{(n)}(x) \Rightarrow F(x)$ $(m^{(n)} \le C < 1)$, то $\tilde{w}^n \to \tilde{w}$. Следовательно, если m и $m_{(2)}$ фиксированы, то минимум $w_{(1)}$ достигается на некотором распределении $F^z(x)$, для которого $m^* = m$, но $m_{(2)}^* \le m_{(2)}$. Таким образом, рассматриваемая задача свелась к задаче нахождения распределения $F(x)$ (будем называть его ***экстремальным***), минимизирующего значение функционала (1) при ограничениях:

$$\int_0^\infty x dF(x) = p,$$

$$\int_0^\infty x^2 dF(x) \le m_{(2)}. \tag{2}$$

Выполнив замену $y = F(x)$, эту задачу можно свести к задаче нахождения минимума функционала

$$\tilde{w} = \int_0^1 \left(1 - \int_0^x \beta(y) dy\right)^{-2} dx \tag{3}$$

при ограничениях:

$$\int_0^1 \beta(x) dx = p, \tag{4}$$

$$\int_0^1 \beta^2(x) dx \le m_{(2)}, \tag{5}$$

где $\beta(x) > 0$ — неубывающая функция. Функцию $\beta(x)$, доставляющую минимум функционалу (3), также будем называть ***экстремальной***. Ясно, что при нахождении экстремальной функции $\beta(x)$ можно условие (5) заменить условием

$$\int_0^1 \beta^2(x) dx \le m^*_{(2)}, \tag{6}$$

где $m^*_{(2)} \le m_{(2)}$.

Для решения поставленной задачи воспользуемся методами вариационного исчисления. Сразу исключим из рассмотрения тривиальный случай $m^*_{(2)} \le p^2$, т. е. $\beta(x) = p$. Пусть x_0 — точка роста функции $\beta(x)$, т. е. для любого $\Delta > 0$ справедливо $\beta(x_2 + \Delta) - \beta(x_0 - \Delta) > 0$. Кроме того, пусть x_0 — точка непрерывности $\beta(x)$. Определим понятие Δ-вариации $\beta(x)$ в точке x_0 при $\Delta \to 0$. Возьмем $x_1 < x_2$ и $x_2 > x_0$. Если $\Delta > 0$, положим

$$\tilde{\beta}(x) = \begin{cases} \beta(x); & x \,\overline{\in}\, (x_1, x_2), \\ \beta(x_2); & x \in (x_1, x_2). \end{cases}$$

Если $\Delta < 0$, то

$$\tilde{\beta}(x) = \begin{cases} \beta(x); & x \,\overline{\in}\, (x_1, x_2), \\ \beta(x_1); & x \in (x_1, x_2). \end{cases}$$

Для достаточно малого Δ можно выбрать x_1 и x_2 таким образом, что $\int_0^1 \left(\tilde{\beta}(x) - \beta(x)\right) dx = \Delta$ и при $\Delta \to 0$ выполняются соотношения $x_1 \to x_0$ и $x_2 \to x_0$. Тогда функцию $\tilde{\beta}(x) = \tilde{\beta}_\Delta(x)$ будем называть Δ-вариацией функции $\beta(x)$ в точке x_0. Аналогично определяется понятие Δ-вариации $\beta(x)$ и в точках разрыва функции $\beta(x)$.

Нетрудно вывести формулу для приращения $\Delta\tilde{w} = \tilde{w}^\Delta - \tilde{w}$, где $\tilde{w}^\Delta$ — значение функционала $\tilde{w}$ после подстановки Δ-вариации $\tilde{\beta}(x)$:

$$\Delta\tilde{w} = 2\Delta \int_x^1 \left(1 - \int_0^x f(y) dy\right)^{-3} dx + O(\Delta). \tag{7}$$

Выражение $2\Delta \int_x^1 \left(1 - \int_0^x f(y) dy\right)^{-3} dx$ будем называть также *Δ-производной функционала* $\tilde{w}$ в точке x_0 и обозначать $w_\Delta(x_0)$. Ясно, что приращение $\Delta\tilde{w}$ обладает свойством линейности относительно Δ-вариации в отдельных точках, т. е. если $\Delta_1\tilde{w}, \ldots, \Delta_n\tilde{w}$ — приращение w после отдельного приращения $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ — вариации в точках $x_1, \ldots, x_n$, то после общего применения $\alpha_1\Delta_1, \ldots, \alpha_n\Delta_n$ вариаций в этих же точках приращение $\Delta\tilde{w}$ функционала $\tilde{w}$ будет иметь вид:

$$\Delta\tilde{w} = \alpha_1\Delta_1\tilde{w} + \alpha_n\Delta_n\tilde{w} + O(\max_{1 \le k \le n}|\Delta_k|). \tag{8}$$

Пусть $x_1 < x_2 < x_3$ — произвольные точки (роста $\beta(x)$) на интервале $[0,1]$. Проведем вариацию функции $\beta(x)$ в этих точках величинами соответственно Δ_1, Δ_2 и Δ_3. Однако для того, чтобы после вариации функция $\beta(x)$ также удовлетворяла условиям (4) и (6), необходимо выполнение соотношений:

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 0,$$

$$\beta(x_1)\Delta_1 + \beta(x_2)\Delta_2 + \beta(x_3)\Delta_3 = O(\Delta_1),$$

т. е.

$$\Delta_2 = \Delta_1 \frac{\beta(x_1)-\beta(x_3)}{\beta(x_3)-\beta(x_2)} + O(\Delta_1), \tag{9}$$

$$\Delta_3 = \Delta_1 \frac{\beta(x_2)-\beta(x_1)}{\beta(x_3)-\beta(x_2)} + O(\Delta_1). \tag{10}$$

В дальнейшем будем обозначать через $\tilde{\beta}(x)$ функцию, являющуюся Δ_1-вариацией в точке x_1, Δ_2 — вариацией в точке x_2, Δ_3 — вариацией в точке x_3 функции $\beta(x)$.

Соответствующее приращение функционала $\tilde{w}$ обозначим через $\Delta\tilde{w}$. Отметим, что если $x_i (i = 1,2,3)$ — точка разрыва $\beta(x)$, то в зависимости от знака Δ_i нужно в качестве $\beta(x)_i$ брать либо $\lim_{x\downarrow x_i}\beta(x)$, либо $\lim_{x\uparrow x_i}\beta(x)$. Тогда если $\beta(x)$ — экстремальная функция, то $\Delta\tilde{w} \geq 0$.

Покажем, что для экстремальной функции $\beta(x)$ не существует интервалов постоянства (за исключением, быть может, $\beta(x) = 0$ при $x\in[0; \alpha)$). Действительно, пусть $\beta(x) = \beta$ при $x\in(x_1, x_2)$ и пусть x_3 — произвольная точка роста $\beta(x)$. Полагая $\Delta_1 < 0$, из (9) и (10) находим:

$$\Delta_2 = \Delta_1 + O(\Delta_1), \quad \Delta_3 = O(\Delta_1),$$

и по (7) и (8) приращение $\Delta\tilde{w}$ будет иметь вид

$$\Delta\tilde{w} = 2\Delta_1 \int_{x_1}^{x_2} \left(1-\int_0^x \beta(y)dy\right)^{-3} dx + O(\Delta_1),$$

что противоречит условию экстремальности.

Аналогично $\beta(x)$ не может иметь точек разрыва.

Из (8) – (10), а также строгой монотонности и непрерывности экстремальной функции $\beta(x)$, устремляя Δ_1 к нулю, получаем следующие уравнения:

$$\int_{x_1}^{1} \left(1-\int_0^x \beta(y)dy\right)^{-3} dx + C\beta(x_1) = C^*, \tag{11}$$

где

$$C = \left(\beta(x_3)-\beta(x_2)\right)^{-1} \int_{x_2}^{x_3} \left(1-\int_0^x \beta(y)dy\right)^{-3} dx,$$

$$C^* = \frac{1}{\beta(x_3)-\beta(x_2)} \left[\beta(x_3)\int_{x_2}^{1} \frac{dx}{\left(1-\int_0^x \beta(y)dy\right)^3} - \beta(x_2)\int_{x_2}^{1} \frac{dx}{\left(1-\int_0^x \beta(y)dy\right)^3}\right].$$

Из (11) видим, что $\beta(x)$ является непрерывно дифференцируемой функцией и имеет место уравнение

$$C\beta'(x) = \left(1-\int_0^x \beta(y)dy\right)^{-3} \tag{12}$$

с начальным условием, которое может быть двух типов:

$$\beta(0) = \beta \geq 0, \quad \beta < p, \tag{13}$$

или

$$\beta(0) = 0, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{14}$$

Найдем сначала решение уравнения (12) в случае выполнения условия (13). Имеем:

$$\beta^2(x) = 2C\left(1-\int_0^x \beta(y)dy\right)^{-2} + A. \tag{15}$$

Используя (13), получаем:

$$A = \beta^2 - 2\mathrm{C}. \tag{16}$$

Далее,

$$A\left(1-\int_0^x \beta(y)dy\right)^2 + 2C = (B-Ax)^2 \quad (A \neq 0),$$

$$\left(1-\int_0^x \beta(y)dy\right)^2 = B - 2x\sqrt{2C} \quad (A = 0).$$

Используя (16), находим:

$$\left(1-\int_0^x \beta(y)dy\right)^2 = 1-2\beta x + Ax^2,$$

$$\beta(x) = (\beta - Ax)\left(1-2\beta x + Ax^2\right)^{-1/2}. \qquad (17)$$

Воспользовавшись (14), получим из (17)

$$A = (1-p)^2 + 2\beta - 1. \qquad (18)$$

В последней формуле постоянная A при β, изменяющемся на интервале $[0, p)$, изменяется на интервале $[(1-p)^2 - 1, p^2)$.

Если же выполнено (14), то в уравнении (15) $A = -2C$, и решая (15), находим:

$$\left(1-\int_0^x \beta(y)dy\right)^2 = 1-A(x-a)^2,$$

$$\beta(x) = \begin{cases} 0; & x \le \alpha, \\ A(x-\alpha)\left(1-A(x-\alpha)^2\right)^{-1/2}; & x > 0. \end{cases}$$

$$A = \left(1-(1-p)^2(1-\alpha)^2\right). \qquad (19)$$

В формуле (19) постоянная A при α, изменяющемся на интервале $(0,1)$, изменяется на интервале $(1-(1-p)^2, \infty)$.

Найдем теперь $\int_0^1 \beta^2(x)dx$. При выполнении условия (13) имеем:

$$\int_0^1 \beta^2(x)dx = (1-p)^2 + 2\beta - 1 = \frac{1}{2}\sqrt{(1-\beta)^2-(1-p)^2}\,\ln\frac{\left(1-\beta-(1-p)^2+\sqrt{1-\beta-(1-p)^2}\left(\beta-\sqrt{1-\beta-(1-p)^2}\right)\right)}{\left(1-\beta-(1-p)^2-\sqrt{1-\beta-(1-p)^2}\left(\beta+\sqrt{1-\beta-(1-p)^2}\right)\right)}. \qquad (20)$$

Причем если $(1-p)^2 + 2\beta = 1$, то это выражение принимает значение $-p(1-p/2)\ln(1-p)$. Аналогично, при выполнении условия (14)

$$\int_0^1 \beta^2(x)dx = \frac{1}{1-a}\left(\frac{\sqrt{1-(1-p)^2}}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-(1-p)^2}}{1-\sqrt{1-(1-p)^2}} + (1-p)^2 - 1\right). \qquad (21)$$

Из формул (20), (21) следует, что $\int_0^1 \beta^2(x)\,dx$ как функция от β возрастает на интервале

$$\left[p^2, \frac{\sqrt{\left(1-(1-p)^2\right)}}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\left(1-(1-p)^2\right)}}{1-\sqrt{\left(1-(1-p)^2\right)}} + (1-p)^2 - 1\right]$$

при β, убывающем на $[p, 0]$, и как функция от α возрастает на интервале

$$\left(\frac{\sqrt{\left(1-(1-p)^2\right)}}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\left(1-(1-p)^2\right)}}{1-\sqrt{\left(1-(1-p)^2\right)}} + (1-p)^2 - 1, \infty\right)$$

при α, возрастающем на $(0,1)$. Таким образом, из уравнения (6) можно однозначно определить либо β, либо α.

Значение функционала w задается при выполнении (13) формулой

$$w = \frac{1}{2\sqrt{(1-\beta)^2-(1-p)^2}}\ln\frac{\left(1-\beta-(1-p)^2+\sqrt{1-\beta-(1-p)^2}\left(\beta-\sqrt{1-\beta-(1-p)^2}\right)\right)}{\left(1-\beta-(1-p)^2-\sqrt{1-\beta-(1-p)^2}\left(\beta+\sqrt{1-\beta-(1-p)^2}\right)\right)}, \qquad (22)$$

а при выполнении (14) — формулой

$$\tilde{w} = \frac{1}{2\sqrt{1-(1-p)^2}}\ln\frac{1+\sqrt{1-(1-p)^2}}{1-\sqrt{1-(1-p)^2}}. \qquad (23)$$

Из (22) и (23) следует, что $\tilde{w}$ как функция от β убывает на интервале

$$\left(\frac{1}{1-p}\frac{1}{2\sqrt{1-(1-p)^2}}\ln\frac{1+\sqrt{\left(1-(1-p)^2\right)}}{1-\sqrt{\left(1-(1-p)^2\right)}}\right)$$

при β, убывающем на $[p, 0]$, и как функция от α убывает на интервале

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{1-(1-p)^2}}\ln\frac{1+\sqrt{\left(1-(1-p)^2\right)}}{1-\sqrt{\left(1-(1-p)^2\right)}}, 1\right)$$

при α, возрастающем на $(0,1)$. Отсюда можно сделать вывод, что при заданных значениях p и $m_{(2)}$ минимум функционала (1) достигается в том случае, если неравенства (2) и (5) превращаются в строгие равенства, а в равенстве (6) $m^*_{(2)} = m_{(2)^*}$.

Выпишем семейство экстремальных распределений $F(x)$. Если

$$m_2 \le \frac{\sqrt{1-(1-p)^2}}{1}\ln\frac{1+\sqrt{1-(1-p)^2}}{1-\sqrt{1-(1-p)^2}}+(1-p)^2-1$$

и

$$m_2 \ne -p\left(1-\frac{p}{2}\right)\ln(1-p), \text{ то}$$

$$F(x)=\begin{cases}0; & x\le\beta,\\ \dfrac{\beta}{A}-\dfrac{x}{A}\sqrt{\dfrac{A-\beta^2}{A-x^2}}; & \beta<x\le(\beta-A)(1-p)^{-1},\\ 1; & x>(\beta-A)(1-p)^{-1},\end{cases}$$

где A и β находятся из уравнений $\int_0^1\beta^2(x)dx=m_2$ (18) и (20).

Если $m_2=-p\left(1-\frac{p}{2}\right)\ln(1-p)$, то

$$F(x)=\begin{cases}0; & x\le\beta,\\ \dfrac{x^2-\beta^2}{2\beta x^2}; & \beta<x\le\beta(1-2\beta)^{-1/2},\\ 1; & x>\beta(1-2\beta)^{-1/2},\end{cases}$$

где $\beta=\dfrac{1-(1-p)^2}{2}$. Наконец, если

$$m_2 \le \frac{\sqrt{1-(1-p)^2}}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-(1-p)^2}}{1-\sqrt{1-(1-p)^2}}+(1-p)^2-1,$$

то

$$F(x)=\left\{\begin{matrix}\alpha+x(A+Ax)^{-1/2}; & 0<x\le A(1-\alpha)(1-p)^{-1},\\ 1; & x>A(1-\alpha)(1-p)^{-1},\end{matrix}\right\} \quad (24)$$

где A и α определяются из уравнений $\int_0^1\beta^2(x)dx=m_2$ (19) и (21).

Применим полученные результаты для сравнения по стационарному среднему времени ожидания начала обслуживания дисциплины преимущественного обслуживания наикратчайшего требования без прерывания обслуживания с дисциплиной FIFO.

Как следует из (22) и (23), минимальное значение функционала $\tilde{w}$, как функция от m_2, убывает от $(1-p)^{-1}$ до единицы, причем нижнее значение достигается на «расползающихся» распределениях $F(x)$ (24). Значит, максимальный выигрыш от использования дисциплины преимущественного обслуживания наикратчайшего требования без прерывания обслуживания получается при больших вторых моментах длин требований.

Вывод

При малых загрузках p дисциплина преимущественного обслуживания наикратчайшего требования без прерывания обслуживания выигрыша по сравнению с дисциплиной FIFO практически не дает.

При больших загрузках (p близко к единице) максимальное уменьшение среднего времени ожидания начала обслуживания при испльзовании дисциплины преимущественного обслуживания наикратчайшего требования без прерывания обслуживания по сравнению с дисциплиной FIFO равно $(1-p)^{-1}$. Однако, достигается оно на распределениях $F(x)$ с быстро возрастающим вторым моментом.

Список использованной литературы

1. ***Толубко В. Б., Беркман Л. Н.*** *Методи оптимізації. Київ: ДУТ, 2016. 442 с.*
2. ***Стеклов В. К., Беркман Л. Н.*** *Телекоммуникационные сети. Київ: Техніка, 2000. 392 с.*
3. ***Интеллектуальные*** *сети связи / Б. Я. Лихтциндер, М. А. Кузякин, А. В. Росляков, С. М. Фомичев. Москва: Эко-Трендз, 2000. 205 с.*

Рецензент: доктор техн. наук, профессор **О. М. Власов**, Государственный университет телекоммуникаций, Киев.

О. М. Ткаченко, А. П. Бондарчук

ОЦІНЮВАННЯ СТАЦІОНАРНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ЧЕРГИ В СИСТЕМІ З ВІДНОСНИМИ ПРІОРИТЕТАМИ

Розглянуто систему M|GJ|1|∞ з відносними пріоритетами. Проаналізовано задачу знаходження нижньої оцінки стаціонарного середнього часу очікування початку обслуговування вимоги при дисципліні переважного обслуговування найкоротшої вимоги без переривання обслуговування при заданих першому і другому моментах довжини вимоги.

Ключові слова: система; вимога; черга; час; пріоритет; очікування; довжина; обслуговування; переривання; оцінка.

O. N. Tkachenko, A. P. Bondarchuk

ASSESSMENT OF STATIONARY MIDDLE EARTH IN SYSTEM WITH RELATED PRIORITIES

A system M|GJ|1|∞ with relative priorities is considered. In the case of continuous priorities, the minimum value of the stationary average queue is obtained if the priorities are arranged in the order of increasing average requirement lengths. In the M|GJ|1|∞ system, without interruption of service, the discipline of preferential service of the shortest requirement without service interruption is optimal in the sense of minimizing the stationary average queue. The problem of finding the lower estimate of the stationary average waiting time for the commencement of the maintenance of the requirement in the discipline of the priority service of the shortest requirement without interrupting the service for the given first and second moments of the length of the requirement is considered. To solve this problem, the methods of the calculus of variations are used. Based on the results obtained, a comparison is made between the stationary average waiting time for the commencement of maintenance of the priority service discipline of the shortest requirement without interrupting the maintenance with the FIFO discipline. The maximum benefit from using the discipline of preferential maintenance of the shortest requirement without interrupting maintenance is obtained at large second moments of the requirements lengths. With small loads, the discipline of preferential servicing of the shortest requirement without interrupting the maintenance of the win in comparison with the FIFO discipline practically does not.

Keywords: system; requirement; queue; time; priority; expectation; length; service; interrupt; evaluation.

ЗВ'ЯЗОК

Наукове видання

Редакційна обробка та коректура
О. П. Бондаренко, Т. В. Ількевич

Комп'ютерна верстка та дизайн
Г. С. Тимченко, О. Ю. Апухтіна

Відповідальний за випуск
І. І. Тищенко

Формат 60×84/8. Папір друкарський.
Гарнітура SchoolBookC, EuropeCond. Зам. 326
Наклад 300 прим.

Державний університет телекомунікацій
03110, м. Київ, вул. Солом'янська, 7
Тел. (044) 249-25-75
E-mail: *zviaz-ok@ukr.net*