УДК 511
А. В. ДИКАРЕВ, канд. техн. наук, доцент,
Государственный университет телекоммуникаций, Киев

ФРАКТАЛЬНАЯ СТРУКТУРА СЖИМАЕМОГО ОТРЕЗКА НАТУРАЛЬНОГО РЯДА

Получены рекуррентные формулы сжатия и восстановления целых положительных чисел. Показано, что исходными данными к этим формулам являются фракталоподобные числовые структуры, получаемые в процессе сжатия по определенным критериям сопровождающего данное число отрезка натурального ряда чисел. Такие структуры построены и исследованы для критериев сжатия 2, 3, а также 2, 3 и 5.

Ключевые слова: натуральный ряд чисел; алгоритм; фрактал; этап сжатия; сжатый эквивалент.

ВВЕДЕНИЕ

Если целому положительному (натуральному) числу N поставить в соответствие отрезок натурального ряда чисел размером от 1 до N и считать его *сопровождающим*, то этот отрезок можно сжать, удаляя из него элементы заданной кратности, например 2 и 3 или 2, 3 и 5. Оставшийся набор неудаленных (несжатых, невыколотых) элементов назовем *квазипростыми* по отношению к удаленным неквазипростым элементам, а их общее количество — *остатком* после первого этапа сжатия исходного целого числа. Пересчитав оставшиеся несжатые элементы, получим новое целое натуральное число, меньшее исходного на количество удаленных элементов. Представив остаток новым сопровождающим отрезком натурального ряда, можно перейти к следующему этапу сжатия. Таким образом, удается уменьшить исходное целое число до заранее выбранных размеров — его сжатого эквивалента.

Кратности удаляемых элементов определяются как критерии сжатия. В [1; 2] показано, что эффект сжатия наиболее ярко проявляется при одновременном применении критериев 2, 3 и выше. Обратное восстановление целых чисел по их сжатому эквиваленту является неординарной неоднозначной задачей и может оцениваться по различным алгоритмам. В [2; 3] для квазипростых и остальных исходных целых положительных чисел разработаны два алгоритма — внешний и внутренний. Иначе восстановить целое число в первоначальном виде не удается. Далее рассмотрим возможность восстановления целого положительного числа, применив рекуррентные формулы, в которых в качестве исходных данных используются фракталоподобные структуры, образующиеся в остатках отрезка натурального ряда после его сжатия.

Перейдя от десятичных чисел к их двоичному представлению с помощью рассмотренной процедуры сжатия и восстановления, можно значительно сократить битрейт передаваемого по каналам связи контента.

Исследуем далее фрактальные структуры для двух комбинаций критериев сжатия.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Фрактальная структура сжимаемого отрезка натурального ряда

Расчетные формулы сжатия и восстановления целых чисел должны быть рекуррентными, поскольку этапы прямого и обратного процессов явно взаимосвязаны. Прежде всего необходимо получить исходные данные, в качестве которых имеет смысл использовать фрактальные структуры, образующиеся после сжатия отрезка натурального ряда на каждом этапе.

Рассматриваемые фрактальные структуры представляют собой *числовое распределение промежутков (количества элементов) между двумя квазипростыми элементами отрезка натурального ряда того или иного этапа сжатия исходного числа*.

Оставшийся после сжатия набор разностей двух смежных элементов образует числовые структуры, напоминающие по форме фракталы с одинаковым внутренним содержанием и расширяющимися границами. Далее будем называть такие структуры фракталами сжатия или просто фракталами.

Для критериев 2 и 3, как это видно из результатов сжатия в табл. 1 и 2, наблюдаются следующие закономерности: между двумя ближайшими квазипростыми элементами образуются структуры:

3-1-3-1-3-1- 3-1-3-1-3...

Таблица 1

Сжатие числа 68 по критериям 2 и 3

Отрезок натурального ряда	Остаток	Результат сжатия
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68	24	1 5 7 11 13 17 19 23 25 29 31 35 37 41 43 47 49 53 55 59 61 65 67 68
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24	9	1 5 7 11 13 17 19 23 24
1 2 3 4 5 6 7 8 9	6	1 5 6 7 8 9

Таблица 2

Сжатие числа 88 по критериям 2 и 3

Отрезок натурального ряда	Остаток	Результат сжатия
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88	32	1 5 7 11 13 17 19 23 25 29 31 35 37 41 43 47 49 53 55 59 61 65 67 71 73 77 79 83 85 86 87 88
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32	12	1 5 7 11 13 17 19 23 25 29 31 32
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	9	1 5 6 7 8 9 10 11 12
1 2 3 4 5	2	1 5

Все фракталы начинаются с нечетных знакомест и сами являются нечетными числами. Первые 16 фракталов для критериев 2 и 3 приведены в табл. 3. Получение таких фракталов рассмотрим далее.

Таблица 3

Фракталы для критериев 2 и 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8
F	7	13	19	25	31	37	43	49
n	9	10	11	12	13	14	15	16
F	55	61	67	73	79	85	91	97

Фракталы удобно использовать в качестве исходных данных в формулах сжатия и восстановления целых натуральных чисел.

Фрагментальные фракталы для критериев 2, 3 и 5

Намного сложнее осуществляется сжатие тех же чисел 68 и 88, приведенных в табл. 1 и 2, но уже по критериям 2, 3 и 5. Фрактальная структура квазипростых чисел без учета конечных несжатых чисел имеет вид:

5-3-1-3-1-3-5-1- 5-3-1-3-1-3-5-1-5-3-1-3-1-3-5-1-5-3-5-3…

В этом легко удостовериться, воспользовавшись табл. 4. Здесь фрактальная структура имеет три фрагмента, представленных в табл. 5.

Таблица 4

Сжатие числа 88 по критериям 2, 3 и 5

Отрезок натурального ряда	Остаток	Результат сжатия
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88	28	1 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 49 53 59 61 67 71 73 77 79 83 84 85 86 87 88
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28	12	1 7 11 13 17 19 23 24 25 26 27 28
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	7	1 7 8 9 10 11 12

Таблица 5

Фрагменты фрактала для критериев 2, 3 и 5

Структура фрактала для критериев 2, 3 и 5		
5-3-1-3-1-3-5-1		
Фрагмент 1	Фрагмент 2	Фрагмент 3
5-3	1-3-1-3	5-1

Фракталы для критериев сжатия 2, 3 и 5 становятся слишком громоздкими, занимая 22 знакоместа, и при использовании их в качестве исходных данных могут выступать за пределы сжимаемого отрезка натурального ряда. Этого легко избежать, если применять отдельные фрагменты фракталов, из которых, как показано в табл. 5, условно можно выделить три. Тогда в качестве исходных данных в зависимости от величины сжимаемого числа используются как целые фракталы, так и отдельные их фрагменты.

Исходные данные

В процессе применения рекуррентных формул сжатия и восстановления будем исходить из следующего.

• Для первого этапа сжатия — исходное целое натуральное число.

• Для последующих этапов сжатия — число оставшихся от предыдущего этапа несжатых квазипростых элементов и дополнение их до величины сжимаемого числа.

• Если сжимаемое число квазипростое, то оставшаяся после сжатия на любом этапе последовательность квазипростых элементов отрезка натурального ряда должна оканчиваться этим сжимаемым квазипростым числом.

• Если сжимаемое число неквазипростое, то оставшаяся после сжатия последовательность квазипростых элементов дополняется несжатыми членами отрезка натурального ряда до величины сжимаемого на этом этапе числа, а их количество входит в остаток.

• Для получения количества оставшихся после сжатия натурального ряда квазипростых элементов используется их фрактальная особенность.

• При восстановлении целого числа из предыдущего этапа восстановления на последующий этап в качестве исходных данных пересылается число несжатых квазипростых элементов и число дополнительных несжатых членов, если восстанавливаемое целое число неквазипростое.

• Для получения отрезка натурального ряда по виду восстановленного предыдущего этапа используется фрактальная особенность сжатого отрезка натурального ряда.

Замечание. Сжатый эквивалент исходного целого числа удобнее всего либо не сжимать вообще, либо сжимать по принципу: единица–первый квазипростой элемент–остальные несжатые элементы сжатого эквивалента.

Получение формулы сжатия целых чисел для критериев 2 и 3

Напомним основные свойства фракталов сжатия. Численное значение фрактала равно шести. Ширина равна двум. Фрактал начинается с нечетного номера выколотого натурального ряда.

Исходя из этих свойств определим, на каком месте n при сжатии отрезка натурального ряда размером C будет находиться ближайший по величине к нему фрактал F:

$$n = /\mathrm{C}:6/\cdot 2 + 1, \tag{1}$$

где символом // обозначена целая часть числа.

В частности, для $C = 68$ ближайший к нему фрактал находится на $n = 11\cdot 2 + 1 = 23$ месте, в чем можно убедиться, проанализировав табл. 1.

Величина фрактала определяется формулой:

$$F = /n:2/\cdot 6 + 1. \tag{2}$$

Для рассматриваемого случая сам фрактал $F = 67$.

Пример 1. Найти остаток количества элементов после первого этапа сжатия квазипростого числа 85.

Р е ш е н и е. По формуле (1) находим место последнего фрактала, равного сжимаемому числу:

$$n = /\mathrm{C}:6/\cdot 2 + 1 = 29.$$

Исходное квазипростое число согласно внешнему алгоритму [2] сжимается на первом этапе до величины 85 (см. табл. 2).

Пример 2. Найти остаток отрезка натурального ряда после первого этапа сжатия целого числа 88.

Р е ш е н и е. Находим ближайший к числу 88 фрактал, его знакоместо и величину.

1. По формуле (1) находим знакоместо указанного фрактала:

$$n = /\mathrm{C}:6/\cdot 2 + 1 = n = /88:6/\cdot 2+1 = 29.$$

2. По формуле (2) получаем значение искомого фрактала:

$$F = /n:2/\cdot 6+1 = F = /29:2/\cdot 6+1 = 85.$$

3. Дописываем справа к значению крайнего фрактала несжатые элементы отрезка натурального ряда и подсчитываем их количество d. Здесь используется свойство внутреннего алгоритма сжатия:

$$\mathrm{N} = F + d = 85,\ 86,\ 87,\ 88 \text{ или } d = 3.$$

4. Окончательное значение остатка элементов отрезка натурального ряда, сопровождающего целое число 88 после первого этапа сжатия:

$$O = n + d = 29+3 = 32.$$

Результат можно проверить по табл. 2.

Получение формулы восстановления целых чисел для критериев 2 и 3

Решение проблемы восстановления целого числа предусматривает поиск его значения по известному остатку от сжатия отрезка натурального ряда по критериям 2 и 3. Исходными данными для восстановления целых чисел каждого этапа является полученный на предыдущем этапе отрезок натурального ряда, представленный в виде набора квазипростых элементов остатка, сохранившихся после удаления из отрезка натурального ряда элементов, кратных 2 и 3, а также несжатых элементов в конце отрезка, если они имеются.

Очевидно, что если на данном этапе получен не сжатый отрезок натурального ряда, то его необходимо сжать, чтобы использовать на следующем этапе, представив в качестве исходных данных набором расположенных подряд квазипростых чисел, учтя при этом несжатые элементы — их величину и количество. Рассмотрим это на примере 3.

Пример 3. Остаток отрезка натурального ряда некоторого этапа после сжатия по критериям 2 и 3 содержит 19 квазипростых элементов и оканчивается тремя несжатыми элементами. Необходимо восстановить целое число этого этапа сжатия.

Р е ш е н и е. Поскольку каждый фрактал содержит два квазипростых числа, величина фрактала равна 6 и он располагается, начиная с нечетного знакоместа, то на 19-й позиции имеем фрактал, ближайший по величине к восстанавливаемому числу. Величина конечного фрактала определяется формулой:

$$F = /n:2/\cdot 6 + 1. \tag{3}$$

Величина фрактала равна $F = /19:2/\cdot 6 + 1 = 55$. Дописывая справа три несжатых числа, находим величину сжимаемого числа данного этапа:

$$\mathrm{C} = F,\ 56,\ 57,\ 58.$$

Следовательно, целое число остатка равно 58.

Пример 4. Целое число остатка занимает 27-е знакоместо и является квазипростым. Требуется найти его величину.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой (3) и тем свойством фракталов, что они начинаются с нечетных позиций. Тогда имеем:

$$F = /27{:}2/\cdot 6 + 1 = 79.$$

Следует отметить, что если бы в качестве исходных данных использовать только число элементов остатка и сигнальную последовательность, то описание состояния остатка каждого этапа потребовало бы 2 бита в сигнальной последовательности: остаток–квазипростое число, остаток–предыдущее квазипростое число с несколькими несжатыми элементами и остаток–квазипростое число с одним несжатым элементом в конце его. Длина сигнальной последовательности была бы равной удвоенной величине количества этапов сжатия.

Выводы

1. Отрезки натуральных рядов после сжатия по критериям 2 и 3, а также 2, 3 и 5 из разностей смежных оставшихся несжатыми элементов образуют периодические цифровые структуры, по форме сходные с фракталами, которые удобно использовать в качестве исходных данных в формулах сжатия и восстановления целых чисел.

2. Вследствие большого размера фракталов, образующихся после сжатия отрезка натурального ряда по критериям 2, 3 и 5, перед использованием их в качестве исходных данных удобно условно разбивать фрактал на отдельные фрагменты.

3. При восстановлении исходного целого числа по его сжатому эквиваленту с предыдущего этапа на следующий в качестве исходных данных требуется передавать отдельно квазипростые элементы остатка и количество добавляемых к ним несжимаемых цифр в конце восстановленного числа.

4. Расчетные формулы сжатия и восстановления целых чисел являются рекуррентными.

5. Для большей определенности сжатый эквивалент целого числа имеет смысл представлять единицей, следующим квазипростым после сжатия элементом, за которым следуют несжатые оставшиеся элементы отрезка натурального ряда сжатого эквивалента.

Список использованой литературы

*1. **Дикарев, А. В.** Сжатие двоичных блочних кодов / А. В. Дикарев // Зв'язок.— 2017.— №1(125).— С. 40–43.*

*2. **Алгоритми** створення проріджуваних кодів / [В. Г. Сайко, О. В. Дікарєв, Л. М. Грищенко та ін.] // Зв'язок.— 2017.— №2(126).— С. 33–39.*

*3. **Вейль, А.** Основы теории чисел / А. Вейль.— М.: Мир, 1972.— 373 с.*

*4. **Виноградов, И. М.** Основы теории чисел / И. М. Виноградов.— М.: Наука.*

Рецензент: доктор техн. наук, профессор **Б. Ю. Жураковский**, Государственный университет телекоммуникаций, Киев.

О. В. Дикарев

ФРАКТАЛЬНА СТРУКТУРА СТИСНЕНОГО ВІДРІЗКУ НАТУРАЛЬНОГО РЯДУ

Отримано рекурентні формули стиснення і відновлення цілих додатних чисел. Показано, що вихідними даними для цих формул є фракталоподібні числові структури, утворювані в процесі стиснення за певними критеріями супровідного щодо даного числа відрізка натурального ряду. Такі структури побудовано й досліджено для критеріїв стиснення 2, 3, а також 2, 3 і 5.

Ключові слова: натуральний ряд чисел; алгоритм; фрактал; етап стиснення; стиснений еквівалент.

A. V. Dikarev

FRACTAL STRUCTURE OF COMPRESSABLE SECTION OF NATURAL SERIES

Recurrent formulas of compression and recovery of integer and positive numbers are received. It is shown, that initial data to them are the similar to fractal structures received as a result of a piece of natural series compression accompanying the given number. Suck structures have been received and considered for criteria of compression 2, 3, and also 2, 3 and 5.

Keywords: a natural series; algorithm; a fractal; stage; the compressed equivalent.