УДК 511
Ю. А. МИЛОВА, аспирантка,
Государственный университет телекоммуникаций, Киев

ЧИСЛОВЫЕ ФРАКТАЛЫ ЧАСТИЧНО СЖАТОГО НАТУРАЛЬНОГО РЯДА

Рассмотрены и наглядно проиллюстрированы с использованием визуализирующих возможностей аппарата теории матриц важнейшие закономерности, которые носят ярко выраженный фракталоподобный характер и, возникая при поэтапном сжатии целого положительного (натурального) числа, позволяют эффективно осуществлять поэтапное его восстановление.
Ключевые слова: натуральный ряд чисел; алгоритм сжатия, критерий сжатия; фракталы; фрактальные последовательности; квазипростое число.

ВВЕДЕНИЕ

Каждое кодовое слово двоичного блочного кода можно представить в виде некоторого натурального (целого положительного) числа в десятичной системе счисления. Любое натуральное десятичное число N можно, в свою очередь, поставить в соответствие конечной возрастающей последовательности натуральных чисел вида 1, …, N, которую назовем сопровождающим данное число N отрезком натурального ряда (далее — отрезок).

Используя свойства делимости натуральных чисел и «прореживая» данный отрезок «выкалыванием» (исключением) чисел, кратных, например, числам 2 и 3, осуществляем поэтапное сжатие исходного отрезка, освобождая его от избыточной информации, затем восстанавливая в виде, максимально близком к первоначальному.

Исследуемые далее свойства числовых фракталов позволяют эффективно сжимать и восстанавливать любые натуральные числа.

В дальнейшем, переходя от десятичных чисел к их двоичному представлению, достигаем многократного сокращения битрейта передаваемого по каналам связи контента.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Глоссарий

Сжимаемое число — натуральное число N, сопровождающий отрезок которого подвергается выкалыванию элементов, удовлетворяющих заданным критериям сжатия.

• **Критерий сжатия** — заданная кратность выкалываемых элементов отрезка на любом этапе сжатия исходного целого числа. Указанная кратность может быть 2, 3, 5 и т. д.

• **Алгоритм сжатия** — процедура выкалывания элементов данного отрезка, удовлетворяющих критериям сжатия.

• **Этап сжатия** — процесс применения алгоритма сжатия к очередному отрезку (начиная с того, который сопровождает исходное число).

• **Фрактал** — шестиэлементная числовая последовательность, отражающая закономерности распределения промежутков (количества элементов) между двумя принадлежащим ей квазипростыми числами, возникающими при осуществлении того или иного этапа сжатия данного числа.

• **Квазипростое число** — натуральное число, не удовлетворяющее критериям сжатия.

Фрактальные свойства отрезков наиболее ярко обнаруживаются при матричном представлении отрезков, соответствующих последовательно осуществляемым этапам сжатия.

Рассмотрим, например, процесс сжатия числа 74 по критериям 2 и 3, приведенный в таблице. Как видим, получен в итоге трехэлементный сжатый эквивалент числа 74 — отрезок 1/5/7, состоящий из квазипростых элементов.

Этапы сжатия числа 74

Отрезок натурального ряда	Остаток	Результат сжатия
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 3031 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74	26	1 5 7 11 13 17 19 23 25 29 31 35 37 41 43 47 49 53 55 59 61 65 67 71 73 74
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26	9	1 5 7 11 13 17 19 23 25
1 2 3 4 5 6 7 8 9	3	1 5 7

Следует отметить, что при реализации алгоритма сжатия в качестве альтернативы для упрощения алгоритма выкалывания из отрезка чисел, кратных 2, 3, а также 2, 3 и 5, были рассмотрены варианты получения квазипростых чисел при помощи классического алгоритма — решета Эратосфена [2; 3], обеспечивающего нахождение простых чисел методом исключения.

Идею решета Эрастофена в случае получения квазипростых чисел воплощает рис. 1, где выкалывание очередных отрезков осуществляется по критериям 2 и 3 и представляется матрицей размером 6×13 для исходного целого числа 74. Выкалываемые элементы отрезков затемнены.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74				

Рис. 1. Выкалывание элементов, кратных 2 и 3, из очередных отрезков, сопровождающих число 74 и все следующие остатки

Сразу видны следующие закономерности.

1. Внутристрочные фракталы построены по единому принципу: разность (всегда двух) квазипростых чисел постоянна и равна четырем (например, 5 – 1 = 4 в первой строке и 71 – 67 = 4 — в 16-й строке).

2. Межстрочные фракталы дают постоянную разность первых элементов двух соседних строк, равную шести.

3. Между двумя квазипростыми элементами в каждой строке матрицы содержатся три выкалываемые элемента.

4. Просеивание элементов отрезков происходит через одни и те же ячейки — 2-й, 3-й, 4-й и 6-й столбцы матрицы.

5. Из частично выколотого натурального ряда посредством другого расположения элементов остатка можно создать и другие фракталоподобные структуры.

Если взять другие критерии сжатия, например, 2, 3 и 5, для того же числа 74, то фрактальные структуры будут совсем иными (рис. 2).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74																

Рис. 2. Матрица выкалывания элементов, кратных 2, 3 и 5, из числа 74

Выделив для наглядности ячейки с числами, которые были выколоты, можно говорить о четком подобии строк каждой из матриц.

Закономерности данного случая:

1. Внутристрочные фрактальные структуры изменили размещение выколотых чисел между квазипростыми, а именно:

одно квазипростое — **пять** выкалываемых — **одно** квазипростое — **три** выкалываемых — **одно** квазипростое — **одно** выкалываемое — **одно** квазипростое — **три** выкалываемых — **одно** квазипростое — **одно** выкалываемое — **одно** квазипростое — **три** выкалываемых — **одно** квазипростое — **пять** выкалываемых — **одно** квазипростое — **одно** выкалываемое, т. е. каждая строка имеет структуру

$$\underbrace{1-5}-\underbrace{1-3}-\underbrace{1-1}-\underbrace{1-3}-\underbrace{1-1}-\underbrace{1-3}-\underbrace{1-5}-\underbrace{1-1}.$$

2. Межстрочные фрактальные структуры дают одну и ту же разность первых элементов двух соседних строк, равную 30.

3. Просеивание элементов отрезка осуществляется через одни и те же ячейки — столбцы матрицы от 2-го по 6-й; от 8-го по 10-й; 12-й; от 14-го по 16-й; 18; от 20-го по 22-й; от 24-го по 28-й; 30-й.

4. На основе частично выколотого натурального ряда можно создавать и другие фракталоподобные структуры.

Термин «фрактал» (от лат. *frangere* — «ломать», «разбивать») ввел современный американский математик Бенуа Мандельброт [3], предложив называть фракталами структуры, состоящие из частей, которые в каком-то смысле подобны целому.

Когда речь идет о сжатии отрезков натурального ряда, в качестве фракталов выступают отдельные строки матрицы, количество столбцов которой определяется как произведение чисел a и k, задающих кратность выкалывания. Количество n невыколотых чисел в таком случае определяется как частное от деления сжимаемого числа A на произведение ab с дальнейшим умножением полученного частного на число, равное количеству f столбцов матрицы, состоящих из невыколотых чисел. Полученный результат подвергается операции взятия целой части числа.

Итак, получено важнейшее в практическом плане соотношение:

$$n = [A/(ab) \cdot f],$$

где [ ] — операция взятия целой части числа.

ВЫВОД

♦ Обнаружены новые закономерности, касающиеся квазипростых и не квазипростых чисел, которые позволяют строить на их основе структуры фрактального типа для наиболее эффективного сжатия и практически полного восстановления целых чисел.

Список использованной литературы

*1. **Дикарев, А. В.** Сжатие двоичных блочных кодов / А. В. Дикарев // Зв'язок.— 2017.— №1 (127).— С. 40–43.*

*2. **Абачиев, С. К.** Числовые фракталы и перспектива качественного углубления математики гармонии / С. К. Абачиев, А. П. Стахов.— М., Академия Тринитаризм.— Эл. №77-6567; публ. 16931, 03.11.2011.*

*3. **Фракталы** в физике/ Под ред. Л. Пьетронеро, Э. Тозатти.— М.: Мир, 1988.*

*4. **Берлекэмп, Э.** Алгебраическая теория кодирования / Э. Берлекэмп; пер. с англ.— М.: Мир, 1971.— 477 с.*

Рецензент: доктор техн. наук, профессор **А. И. Семенко**, Государственный университет телекоммуникаций, Киев.

Ю. О. Мілова

ЧИСЛОВІ ФРАКТАЛИ ЧАСТКОВО СТИСНЕНОГО НАТУРАЛЬНОГО РЯДУ

Розглянуто і наочно проілюстровано з використанням візуалізуючих можливостей апарату теорії матриць найважливіші закономірності, що мають яскраво виражений фракталоподібний характер і, виникаючи при поетапному стисненні цілого додатного (натурального) числа, дозволяють ефективно здійснювати поетапне його відновлення.

Ключові слова: натуральний ряд чисел; алгоритм стиснення, критерій стиснення; фрактали; фрактальна послідовність; квазіпросте число.

Y. A. Milova

NUMERICAL FRACTALS OF A PARTIALLY CONDENSED NATURAL ROW

Numerical fractal educations appearing in natural rows after their partial compression are examined.

Keywords: natural series; compression algorithm; compression criterion; fractals, fractal sequences; quasi-simplenumber.