УДК 517.977
**Н. Б. ДАХНО**, канд. техн. наук;
**Г. В. ШЕВЧЕНКО**, канд. техн. наук,
Державний університет телекомунікацій, Київ;
**В. В. АРДЕЛЯН**, аспірантка,
Кіровоградська льотна академія Національного авіаційного університету, Кропивницький

# Методика застосування двокрокового варіаційно-градієнтного методу в системах автоматичного управління

**Розглянуто динамічні моделі систем підтримки прийняття рішень для систем автоматичного управління, заданих інтегро-диференціальними рівняннями з *K*-позитивно визначеними *K*-симетричними операторами. Щодо зазначених моделей запропоновано методику застосування двокрокового варіаційно-градієнтного методу, яка дає змогу оптимально реалізовувати двокроковий варіаційно-градієнтний метод у системах автоматичного управління.**

**Ключові слова:** динамічні моделі; система підтримки прийняття рішень; польотне завдання; безпілотний літальний апарат; траєкторія польоту; варіаційно-градієнтний метод; градієнтний метод; системи автоматичного управління.

## *Вступ*

Системи підтримки прийняття рішень (СППР) належать до класу інформаційних систем, які являють собою комплекс інструментальних засобів, що підтримують процес формування і прийняття рішень [1]. Нині цей клас інформаційних систем активно розвивається щодо систем автоматичного управління, які можуть використовуватись у безпілотній авіації. Цей напрямок досліджень не залишився поза увагою як вітчизняних, так і зарубіжних дослідників.

Як відомо, запас енергії на борту легкого безпілотного літака сильно обмежений, а отже, обмежений і час автономного польоту. У разі сильного вітру апарат витрачає додаткову енергію на підтримання стійкості в польоті, а також на боротьбу з боковим або зустрічним вітром. Через це хоча польотна дистанція й скорочується, правильно складений маршрут дозволяє використовувати безпілотні літальні апарати легкого класу як розвідників навіть за сильного вітру.

Упровадження динамічних моделей СППР у системах автоматичного управління, використовуваних для дистанційного керування безпілотним літальним апаратом, дозволить проводити розрахунки в реальному масштабі часу для побудови оптимальної траєкторії польоту [2]. Моделі СППР, описувані інтегро-диференціальними рівняннями, забезпечують досить повний опис ситуацій, що виникають при дистанційному керуванні безпілотними літальними апаратами. Тому створення дедалі ефективніших методів розв'язування інтегро-диференціальних рівнянь і удосконалення існуючих сприятиме підвищенню якості керування.

Отже, застосування двокрокового варіаційно-градієнтного методу до задач керування безпілотними літальними апаратами — актуальне і перспективне завдання.

**Аналіз публікацій.** Питанню дослідження СППР у задачах управління приділяється багато уваги [3–5]. Особливе місце в цих працях посідають динамічні моделі підтримки прийняття рішень [6].

Серед багатьох методів, присвячених дослідженню диференціальних динамічних моделей, найчастіше на практиці застосовують варіаційні, проекційні, градієнтні та різницеві методи. Останнім часом дедалі частіше застосовуються підходи, які суттєво прискорюють швидкість збіжності цих методів, мають ширшу сферу застосування та вищу стійкість до збурень [8–10].

Зазначені підходи поєднують у собі ідеї як варіаційних, так і градієнтних методів. Одним із представників цього класу є двокроковий варіаційно-градієнтний метод [11]. Тому розробка методики застосування цього методу до диференціальних динамічних моделей СППР, вочевидь, актуальна.

***Мета статті*** — розроблення методики застосування двокрокового варіаційно-градієнтного методу до динамічних моделей СППР, описуваних інтегро-диференціальними рівняннями з $K$-позитивно визначеними $K$-симетричними операторами.

## *Основна частина*

Динамічна модель системи підтримки прийняття рішень для дистанційного керування безпілотними літальними апаратами подається як крайова задача, породжена інтегро-диференціальним виразом

$$Ax(t)=x^{(m)}(t)+a_1(t)x^{(m-1)}(t)+\ldots+a_m(t)x(t)+\sum_{j=0}^{m}\int_a^b H_j(t,\xi)x^{(j)}(\xi)d\xi=u(t),\ t\in[a,b], \quad (1)$$

і крайовими умовами

$$U_l(x)=\sum_{j=0}^{m-1}\left(\alpha_{lj}x^{(j)}(a)+\beta_{lj}x^{(j)}(b)\right)=\sigma_l,\ l=\overline{0,m-1},\tag{2}$$

де $\alpha_{lj}$, $\beta_{lj}$, $\sigma_l$ при $0\le l,\ j\le m-1$ — сталі числа, а $c_j\in C([a,b]),\ j=\overline{0,m-1}$.

Що ж до змінної $x(t)$, то вона описує траєкторію польоту безпілотного літального апарата на інтервалі часу $[a, b]$, а $u(t)$ — управління (програму управління) динамічною системою на інтервалі часу $[a, b]$.

Простір $L_2[a, b]$ — множина допустимих способів управління динамічною системою.

Оператор A: $D(A)\to H$ визначено на щільній у $L_2[a, b]$ множині $D(A)=\left\{x:\ x^{(m)}\in L_2[a,b], U_l=\sigma_l, l=\overline{0,m-1}\right\}$, яка становить множину можливих траєкторій безпілотного літального апарата. Припустимо, що цей оператор $K$-позитивно визначений і $K$-симетричний, тобто існує оператор $K$: $D(K)\to L_2[a, b]$ вигляду

$$Ku(t)=x^{(n)}(t)+a_1(t)x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}(t)x(t)+\sum_{j=0}^{n-1}\int_a^b D_j(t,\xi)x^{(j)}(\xi)d\xi=f(t),$$

$$t\in[a,b],\ n\le m,\ U_l(x)=\sigma_l,\ l=\overline{0,m-1}$$

такий, що виконуються умови:

$$\exists\alpha,\beta>0:\ \int_a^b(Ax)(t)(Kx)(t)dt\ge\alpha\int_a^b x^2(t)dt,\ \forall x\in D(A);\tag{3}$$

$$\int_a^b(Kx)^2(t)dt\le\beta\int_a^b(Ax)(t)(Kx)(t)dt,\ \ \forall x\in D(A);\tag{4}$$

$$\int_a^b(Ax)(t)(K\nu)(t)dt=\int_a^b(Kx)(t)(A\nu)(t)dt,\ \ \forall x,\nu\in D(A).\tag{5}$$

Нехай існує лінійний оператор $B$: $D(B)\to L_2[a, b]$ і $D(B) = D(A)$:

$$B(x)(t)=x^{(m)}(t)+d_1(t)x^{(m-1)}(t)+\ldots+d_{m-1}(t)x(t)+\sum_{j=0}^{m-1}\int_a^b G_j(t,\xi)x^{(j)}(\xi)d\xi=g(t),\ t\in(a,b),\tag{6}$$

$$U_l(x)=\sigma_l,\ l=\overline{0,m-1}.\tag{7}$$

Оператор $B$ — $K$-позитивно визначений і $K$-симетричний, причому для задачі (6), (7) просто побудувати розв'язок при довільному $g\in L_2[a, b]$.

Припускаємо, що справджується таке співвідношення:

$$\exists\gamma,\delta>0:\ \ 0<\gamma\le\delta<\infty,\ \ \forall x\in D(A),$$

$$\gamma\int_a^b(Bx)(t)(Kx)(t)dt\le\int_a^b(Ax)(t)(Kx)(t)dt\le\delta\int_a^b(Bx)(t)(Kx)(t)dt.\tag{8}$$

При виконанні умов (5)–(10) динамічна модель (1), (2) має єдиний узагальнений розв'язок [12], а розв'язання задачі (1), (2) рівносильне відшуканню мінімуму функціоналу:

$$F(x)=\int_a^b(Ax)(t)(Kx)(t)dt-2\int_a^b f(t)(Kx)(t)dt.\tag{9}$$

Необхідно знайти розв'язок, що задовольняє задані критерії точності, тоді можна буде побудувати траєкторію польоту $x(t)$ на проміжку часу $[a, b]$ під впливом управління $u(t)$.

При побудові траєкторії польоту може знадобиться дуже велика точність. Тому доцільно використовувати двокроковий варіаційно-градієнтний метод.

Розглянемо задачу (1), (2). Нехай $\{\varphi_i:\ i\ge1\}\subset D(A)$ — система лінійно незалежних елементів і $H_0$ — підпростір, породжений $\{\varphi_i:\ i\ge1\}$. Візьмемо $x_1\in\left\{x:\ x^{(m)}\in L_2[a,b], U_l=\sigma_l, l=\overline{0,m-1}\right\}$ — початкове наближення, знайдене за однокроковим варіаційно-градієнтним методом [6]. Припустимо, що $k$-те і $(k-1)$-ше наближення знайдено. Тоді $(k+1)$-ше наближення шукаємо за формулою

$$x_{k+1}(t)=y_k(t)+\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)a_i^k,\ t\in[a,b],\tag{10}$$

в якій елемент $x_k$ визначається із задачі

$$(By_k)(t)=(Bx_k)(t)+\alpha_k(B\delta_k)(t)+\beta_k r_k(t),\ t\in[a,b],\tag{11}$$

$$U_l(y_k)=\sigma_l,\ l=\overline{0,m-1},\ k\ge1,\tag{12}$$

де $\alpha_k$, $\beta_k$ — деякі параметри, $\delta_k(t)=x_k(t)-x_{k-1}(t)$, а $r_k(t)=f(t)-(Ax_k)(t)$ — нев'язка.

Невідомі параметри $\alpha_k$, $\beta_k$ шукаємо з умови мінімуму функціоналу (9).

Оскільки оператор $B$ має обернений, існує функція Гріна $G(t,\xi)$ для задачі

$$(BR_k)(t)=r_k(t),\ t\in[a,b],\ U_l(R_k)=0,\ l=\overline{0,m-1},\ k\geq 1, \tag{13}$$

тобто

$$R_k(t)=\int_a^b G(t,\xi)r_k(\xi)d\xi. \tag{14}$$

Отже, і метод (12)–(14) можна подати у вигляді

$$x_{k+1}(t)=x_k(t)+\alpha_k\delta_k(t)+\beta_k(t)R_k(t)+\sum_{i=0}^{n}\varphi_i(t)a_i^k,\ t\in[a,b]. \tag{15}$$

Після перетворень з урахуванням формул (10)–(12) дістаємо такі співвідношення:

$$\alpha_k\int_a^b(A\delta_k)(t)(K\delta_k)(t)dt+\beta_k\int_a^b(A\delta_k)(t)(KR_k)(t)dt+\sum_{i=1}^{n}a_i^k\int_a^b(A\delta_k)(t)(K\varphi_i)(t)dt=\int_a^b r_k(t)(K\delta_k)(t)dt, \tag{16}$$

$$\alpha_k\int_a^b(A\delta_k)(t)(KR_k)(t)dt+\beta_k\int_a^b(AR_k)(t)(KR_k)(t)dt+\sum_{i=1}^{n}a_i^k\int_a^b(AR_k)(t)(K\varphi_i)(t)dt=\int_a^b r_k(t)(KR_k)(t)dt, \tag{17}$$

$$\alpha_k\int_a^b(A\delta_k)(t)(K\varphi_j)(t)dt+\beta_k\int_a^b(AR_k)(t)(K\varphi_j)(t)dt+\sum_{i=1}^{n}a_i^k\int_a^b(A\varphi_j)(t)(K\varphi_i)(t)dt=\int_a^b r_k(t)(K\varphi_j)(t)dt,\ j=\overline{1,n}. \tag{18}$$

Із того, що оператор $A$ — $K$-позитивно визначений і $K$-симетричний, випливає, що система (16)–(18) має єдиний розв'язок відносно $\alpha_k$, $\beta_k$ і $a_i^k$.

Зауважимо, що

$$\int_a^b r_k(t)(K\varphi_i)(t)dt=0,\ k\geq 2,\ i\geq 1,\ t\in[a,b],$$

Зокрема, при $k=1$ цей висновок дістаємо, застосовуючи однокроковий варіаційно-градієнтний метод.

Для $k\geq 2$ потрібне співвідношення випливає з того, що $r_{k+1}(t)=r_k(t)-\alpha_k A\delta_k(t)-\beta_k AR_k(t)-\sum_{i=1}^{n}a_i^k A\varphi_i(t)$, та із системи (18).

***Теорема.*** **Якщо в задачі (1), (2) оператор $A$ задовольняє умови (3)–(8), $u_0$ — початкове наближення, знайдене за методом Рітца, то двокроковий варіаційно-градієнтний метод (10)–(18) збігається і швидкість збіжності характеризується оцінкою**

$$\left\|u^*-u_k\right\|_B\leq q_k\sqrt{\frac{1}{\sigma\gamma}}\left\|B^{-1}(f-Au_0)\right\|_B,$$

де

$$q_k=\frac{2\xi^k}{1+\xi^{2k}},\quad \xi=\frac{\sqrt{\sigma}-\sqrt{\eta}}{\sqrt{\sigma}+\sqrt{\eta}}.$$

**Практична реалізація**

Для практичної реалізації методу доцільно використовувати наведений далі алгоритм.

Нехай $x_0\in D(A)$ — довільне початкове наближення, $\{\varphi_i:\ i\geq 1\}\subset H_0$ — повна система лінійно незалежних елементів, $\varepsilon>0$ — необхідна точність шуканого розв'язку, $k$ — номер ітерації.

**1.** Ініціалізація початкових даних $x_0(t)$, $\varepsilon$, $k=1$.

**2.** Обчислення 1-го наближення згідно з однокроковим варіаційно-градієнтним методом та відповідним алгоритмом.

Зауважимо, що згідно з однокроковим варіаційно-градієнтним методом у нас обчислено такі вирази:

$$A\varphi_i(t)=\varphi_i^{(m)}(t)+a_1(t)\varphi_i^{(m-1)}(t)+\ldots+a_m(t)\varphi_i(t)+\sum_{j=0}^{m}\int_a^b H_j(t,\xi)\varphi_i^{(j)}(\xi)d\xi;$$

$$K\varphi_i(t)=\varphi_i^{(l)}(t)+k_1(t)\varphi_i^{(l-1)}(t)+\ldots+k_l(t)\varphi_i(t)+\sum_{j=0}^{l}\int_a^b D_j(t,\xi)\varphi_i^{(j)}(\xi)d\xi;$$

$$d_{ij} = \int_a^b A\varphi_i(t)K\varphi_j(t)dt,\ D = \left(d_{ij}\right)_{i,\,j=\overline{1,n}};$$

$$D^{-1},\ \bar{b} = \left(b_i\right)_{i=\overline{1,n}}.$$

**3.** Для $k = k + 1$ обчислення нев'язки:

$$r_k(t) = u(t) - x_{k-1}^{(m)}(t) + a_1(t)x_{k-1}^{(m-1)}(t) + \ldots + a_m(t)x_{k-1}(t) + \sum_{i=0}^{m}\int_a^b H_j(t,\xi)x_{k-1}^{(j)}(\xi)d\xi = f(t),\ t \in [a,b].$$

**4.** Відшукання функції Гріна для задачі

$$(BR_k)(t) = r_k(t),\ t \in [a,b];$$

$$U_l(R_k) = 0,\ l = \overline{0, m-1},\ k \geq 1,$$

тобто $R_k(t) = \int_a^b G(t,\xi)r_k(\xi)d\xi$ при $t \in [a,b]$; далі обчислимо $\delta_k = x_k - x_{k-1}$.

**5.** Обчислення виразів:

$$AR_k(t) = R_k^{(m)}(t) + a_1(t)R_k^{(m-1)}(t) + \ldots + a_m(t)R_k(t) + \sum_{j=0}^{m}\int_a^b H_j(t,\xi)R_k^{(j)}(\xi)d\xi;$$

$$KR_k(t) = R_k^{(l)}(t) + k_1(t)R_k^{(l-1)}(t) + \ldots + k_l(t)R_k(t) + \sum_{j=0}^{l}\int_a^b D_j(t,\xi)R_k^{(j)}(\xi)d\xi;$$

$$A\delta_k(t) = \delta_k^{(m)}(t) + a_1(t)\delta_k^{(m-1)}(t) + \ldots + a_m(t)\delta_k(t) + \sum_{j=0}^{m}\int_a^b H_j(t,\xi)\delta_k^{(j)}(\xi)d\xi;$$

$$K\delta_k(t) = \delta_k^{(l)}(t) + k_1(t)\delta_k^{(l-1)}(t) + \ldots + k_l(t)\delta_k(t) + \sum_{j=0}^{l}\int_a^b D_j(t,\xi)\delta_k^{(j)}(\xi)d\xi.$$

**6.** Обчислення сталої $\bar{c}_k$ для поправки $w_k$:

$$q_j^k = -\int_a^b AR_k(t)K\varphi_j(t)dt,\ j = \overline{1,n};$$

$$\bar{q}_k = \left(q_j^k\right)_{j=\overline{1,n}};$$

$$\bar{c}_k = \left(c_j^k\right)_{j=\overline{1,n}} = D^{-1}\bar{q}_k.$$

**7.** Обчислення параметрів $\alpha_k$ і $\beta_k$:

$$h_{11}^k = \int_a^b A\delta_k(t)K\delta_k(t)dt; \quad h_{12}^k = b\int_a^b A\delta_k(t)K\left(R_k(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i^k\varphi_i(t)\right)dt;$$

$$h_{21}^k = \int_a^b A\delta_k(t)KR_k(t)dt; \quad h_{22}^k = \int_a^b A\left(R_k(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i^k\varphi_i(t)\right)KR_k(t)dt;$$

$$l_1^k = \int_a^b \delta_k(t)Kr_k(t)dt; \quad l_2^k = \int_a^b r_k(t)KR_k(t)dt;$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_k\\ \beta_k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}h_{11}^k & h_{12}^k\\ h_{21}^k & h_{22}^k\end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix}l_1^k\\ l_2^k\end{pmatrix}.$$

**8.** Обчислення поправки;

при $k = 2$, $w_2 = -\alpha_2\sum_{i=1}^{n} b_i\varphi_i(t) + \beta_2\sum_{i=1}^{n} c_i^2\varphi_i(t)$,

при $k \geq 3$, $w_k = \beta_k\sum_{i=1}^{n} c_i^k\varphi_i(t)$.

**9.** Побудова наближення:

$$x_{k+1}(t) = x_k(t) + \alpha_k\delta_k(t) + \beta_kR_k(t) + w_k(t).$$

**10.** Перевірка умови:

якщо $\int_a^b \left(x_{k+1}(t) - x_k(t)\right)^2 dt > \varepsilon^2$,

то $\bar{b} = \bar{0}$ і повторити 3–10.

Схему поданого алгоритму наведено на рисунку.

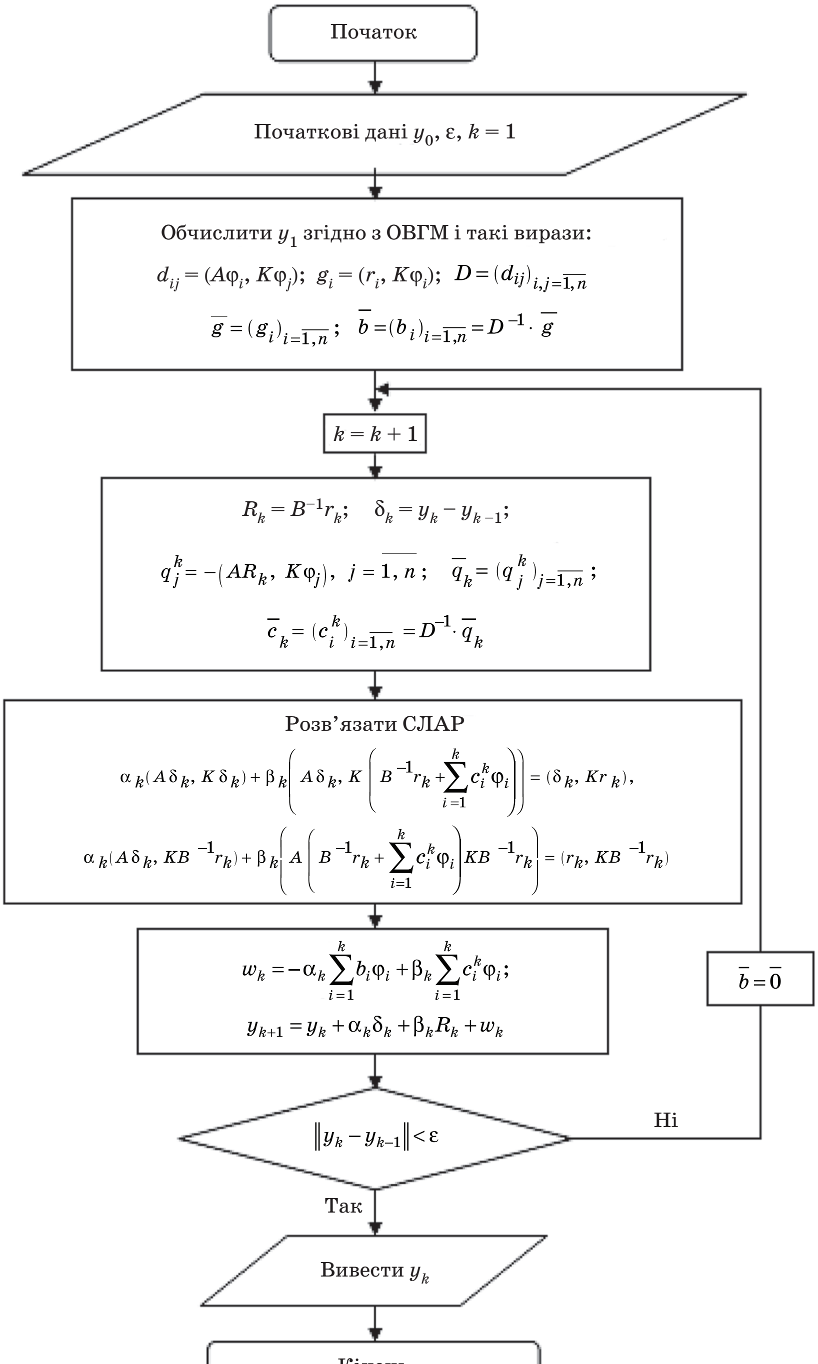


**Схема алгоритму двокрокового варіаційно-градієнтного методу**

### *Висновки*

Наведена методика дає змогу оптимально реалізовувати двокроковий вараційно-градієнтний метод у системах автоматичного управління для диференціальних динамічних моделей із $K$-позитивно визначеним $K$-симетричним оператором, коли йдеться про автоматизацію систем підтримки прийняття рішень, використовуваних для керування безпілотним літальним апаратом.

**Список використаної літератури**


1. **Герасимов, Б. М.** Системы поддержки принятия решений: проектирование, применение, оценка эффективности / Б. М. Герасимов, М. М. Дивизинюк, И. Ю. Субач.— Севастополь: Изд. центр СНИЯЭиП, 2004.— 320 с.
2. **Самков, О. В.** Підтримка прийняття рішень в системі управління літального апарата / [О. В. Самков, В. І. Сілков, О. П. Гожий, О. Є. Мавренков] // Зб. наук. праць Держ. наук.-досл. ін-ту авіації.— 2012.— Вип. 8 (15).— С. 104–109.
3. **Барабаш, О. В.** Побудова нечіткої бази знань системи управління складною організаційно-технічною системою / О. В. Барабаш, В. А. Савченко, А. С. Слюняєв // Авиационно-космическая техника и технология.— 2010.— № 2.— С. 79–82.
4. **Барабаш, О. В.** Модель баз знань інтелектуальної системи управління високошвидкісного рухомого об'єкта на основі її верифікації / О. В. Барабаш, Д. М. Обідін, А. П. Мусієнко // Системи обробки інформації: зб. наук. праць.— 2014.— № 5 (121).— С. 3–6.
5. **Люгер, Д. Ф.** Искусственный интеллект: стратегии и методы решения сложных проблем / Д. Ф. Люгер.— 4-е изд.; пер. с англ.— М.: Вильямс, 2003.— 550 с.
6. **Герасимов, Б. И.** Дифференциальные динамические модели: учеб. пособие / Б. И. Герасимов, Н. П. Пучков, Д. Н. Протасов; Тамб. гос. техн. ун-т.— Тамбов: ТГТУ, 2010.— 80 с.
7. **Ильюшко, В. М.** Беспилотные летательные аппараты: методики приближенных расчетов основных параметров и характеристик / [В. М. Ильюшко, М. М. Митрахович, А. В. Самков, В. И. Силков и др.].— К.: ЦНДІ ОВТ ЗС України, 2012.— 302 с.
8. **Лучка, А. Ю.** Вариационно–градиентный метод / А. Ю. Лучка, О. Э. Нощенко, Н. И. Тухалевская // Журнал вычислительной математики и математической физики.— 1984.— № 7.— С. 963–971.
9. **Рябова, Н. Б.** Варіаційно-градієнтний метод для рівнянь з К-додатно визначеним оператором / Н. Б. Рябова // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения.— К.: Ін-т математики НАН України, 1996.— С. 223–225.
10. **Дахно, Н. Б.** Методика застосування однокрокового варіаційно-градієнтного методу при аналізі диференціальних динамічних моделей СППР / Н. Б. Дахно // Інформаційна безпека.— Луганськ: Східноукраїнський нац. ун-т ім. В. Даля.— 2014.— № 2 (14).— С. 150–156.
11. **Дахно, Н. Б.** Двокроковий варіаційно-градієнтний метод для рівнянь з К-позитивно визначеним та К-симетричним оператором / Н. Б. Дахно // Доп. НАН України.— К.: НАНУ.— 2000.— № 4.— С. 14–17.
12. Petryshyn, W. V. On Clas of K-p.d. and Non-K-p.d. Operators and Operator Equation. / W. V. Petryshyn // Journal of Matheamatical analysis and applications.— Vol. 10, No 1, February, 1965.— P. 1–24.


**Рецензент:** доктор техн. наук **В. Ф. Заїка**, Державний університет телекомунікацій, Київ.

*Н. Б. Дахно, Г. В. Шевченко, В. В. Арделян*

## МЕТОДИКА ПРИМЕНЕНИЯ ДВУШАГОВОГО ВАРИАЦИОННО-ГРАДИЕНТНОГО МЕТОДА В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

*Рассмотрены динамические модели систем поддержки принятия решений для систем автоматического управления, заданные интегро-дифференциальными уравнениями с К-положительно определенными К-симметричными операторами. К указанным моделям предложена методика применения двушагового вариационно-градиентного метода, позволяющая оптимально реализовывать двушаговый вариационно-градиентный метод в системах автоматического управления.*

**Ключевые слова:** динамические модели; система поддержки принятия решений; полетное задание; беспилотный летательный аппарат; траектория полета; вариационно-градиентный метод; градиентный метод; системы автоматического управления.

*N. B. Dakhno, H. V. Shevchenko, V. V. Ardelyan*

## METHOD OF APPLICATION OF THE TWO-HUNGER VARIATION-GRADIENT METHOD IN AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS

*We consider dynamic models of decision support systems for automatic control systems, which are defined by integro-differential equations with K-positive determined K-symmetric operators. To analyze the state of these models, a two-step variational-gradient method is used. This method has a good rate of convergence and is more stable to perturbations compared to gradient methods. The technique of application of a two-step variational-gradient method to dynamic models in decision support systems for controlling unmanned aircraft consists of algorithms and corresponding flowcharts. Present method makes it possible to optimally implement two-step variational-gradient method in the process of automating the control of unmanned aerial vehicles. Application of two-step variational-gradient method in decision support systems will improve the efficiency of information processing in decision-making processes and, thus, improve the quality and efficiency of management unmanned aircraft.*

***Keywords:*** dynamic models; decision support system; flight mission, unmanned aerial vehicles; trajectory; variation-gradient method; gradient method; automatic control systems.