УДК 621.391.833

**А. В. ДИКАРЕВ**, канд. техн. наук,
Государственный университет телекоммуникаций, Киев

# БАЗОВЫЕ КОЛЬЦЕВЫЕ КОДЫ ОСОБОГО ВИДА

***Показано, что любой кольцевой код имеет «базу», простым добавлением к которой нулевых символов можно получить семейство (с бесконечным в пределе числом представителей) кольцевых кодов, векторы показателей сдвига которых подобны по своей структуре базовому и отличаются лишь определенным количеством одинаковых элементов. Рассмотрены варианты семейств кольцевых кодов особого вида, а также исследованы их особенности и закономерности, которым они удовлетворяют.***

**Ключевые слова:** кольцевой код; семейство; представитель; базовый вектор.

### *Исходные предпосылки*

Кольцевые коды основаны на общей алгебраической теории кодирования, теории групп и полей Галуа [1–5]. Построение и свойства кольцевых кодов изложены в [6].

Для создания нового кольцевого кода используется некоторая исходная двоичная последовательность (вектор), состоящая из $N$ двоичных символов, $m$ из которых единицы, а $N - m$ нули. Исходная последовательность $N - 1$ раз циклически с возвратом сдвигается на один символ (шаг) влево или вправо. После каждого сдвига полученная двоичная последовательность записывается под предыдущей. В результате имеется $N - 1$ последовательность (каждая со сдвигом на один символ вправо либо влево), которые образуют квадратную матрицу размером $N \times N$ — ***кольцевой код***.

Далее выполняем такие действия. При помощи одной из двоичных логических операций XOR, OR либо AND [6] осуществляем последовательно преобразование первой и второй строк кольцевого кода, первой и третьей его строк и т. д. Наконец, выполняем указанное преобразование первой и последней строк данного кода. При этом каждый раз суммируем количество единиц в результирующей строке указанного преобразования. Найденная сумма дает один элемент ***вектора показателя сдвига*** (ВПС) — основной характеристики любого кольцевого кода.

После всех операций для первой строки с остальными строками получаются все значения элементов ВПС, число которых равно $N - 1$. Матрица ВПС является треугольной, причем первая ее строка содержит $N - 1$ элемент, вторая — $N - 2$ элемента и, наконец, последняя строка состоит из одного элемента.

Например, два кольцевых кода: первый при $N = 9$ и $m = 4$, а второй при $N = 6$ и $m = 2$ приведены на рис. 1.

Рассмотрим особый вид кольцевых кодов, образующих семейства. Каждый такой код строится на базе исходного базового вектора (базовой исходной последовательности) особой структуры, включающей в себя две образующие сплошные группы единичных либо нулевых двоичных символов $k_1 = 3$ и $k_2 = 2$, разделенных одним двоичным элементом противоположного значения. Кольцевые коды представителей выбранного семейства получаем, приписывая справа к символам базового исходного вектора один, два и т. д. нулей. При этом образуется семейство кольцевых кодов, ВПС которых имеют элементную структуру, функционально зависящую от параметров $k_1$ и $k_2$ исходного вектора, его длины $N$, порядкового номера $n$ в семействе и заранее известной суммы $S_n$ элементов ВПС. Указанная функциональная зависимость далее находится методом статистического анализа рассматриваемых особых кольцевых кодов.

### *Статистический анализ вариантов семейств кольцевых кодов особого вида*

Проблема размещения и размера элементов ВПС для кольцевых кодов особого вида достаточно просто и однозначно решается перебором и анализом наиболее характерных их возможных вариантов с выявлением присущих им закономерностей, на основании чего получаются рабочие алгоритмы.

$$C=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&1&1&1\\1&1&0&0&0&0&0&1&1\\1&1&1&0&0&0&0&0&1\\1&1&1&1&0&0&0&0&0\\0&1&1&1&1&0&0&0&0\\0&0&1&1&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&1&1&0&0\\0&0&0&0&1&1&1&1&0\\0&0&0&0&0&1&1&1&1\end{bmatrix}\quad ПС=\begin{bmatrix}2&4&6&8&8&6&4&2\\&2&4&6&8&8&6&4\\&&2&4&6&8&8&6\\&&&2&4&6&8&8\\&&&&2&4&6&8\\&&&&&2&4&6\\&&&&&&2&4\\&&&&&&&2\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&1\\1&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\\1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\end{bmatrix}\quad ПС=\begin{bmatrix}4&2&4&2&4\\&4&2&4&2\\&&4&2&4\\&&&4&2\\&&&&4\end{bmatrix}$$

**Рис. 1. Кольцевые коды при $N = 9$ и $m = 4$, а также при $N = 6$ и $m = 2$**

◈ ***База семейства***, исходный вектор которого имеет параметры $\boldsymbol{N = 4}$, $\boldsymbol{m = 3}$, $\boldsymbol{k_1 = 2}$, $\boldsymbol{k_2 = 1}$. Все элементы соответствующего ВПС одинаковы и равны 2, а сумма всех элементов ВПС $S_1 = 2 \cdot (N - 1) = 2 \cdot 3 = 6$ (рис. 2).

◆ **Представитель № 2 семейства.** Это кольцевой код при $N = 5$, имеющий $S_2 = 2 \cdot 6 = 12$, $S_2 /2 = 6$ (см. рис. 2). Первый элемент ВПС, как показывают результаты статистических исследований, всегда равен $2 \cdot v = 4$, где $v$ — количество образующих групп, а поскольку $S_2 / 2 = 6$, то чтобы удовлетворить этому условию, второй элемент ВПС должен быть равен 2.

**Семейство 1**

$$\boldsymbol{N = 4,\ m = 3;\ \mathrm{C} = \left[\overbrace{1\ 1}^{k1}\ 0\ \overbrace{1}^{k2}\right];}$$
$$\mathbf{ПС = [2\ 2\ 2] = 6;}$$
$$N = 5,\ m = 3;\ \mathrm{C} = [1\ 1\ 0\ 1\ 0];$$
$$\mathrm{ПС} = [4\ 2\ 2\ 4] = 12;$$
$$N = 6,\ m = 3;\ \mathrm{C} = [1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0];$$
$$\mathrm{ПС} = [4\ 4\ 2\ 4\ 4] = 18;$$
$$N = 8,\ m = 3;\ \mathrm{C} = [1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0];$$
$$\mathrm{ПС} = [4\ 4\ 4\ 6\ 4\ 4\ 4] = 30;$$
$$N = 15,\ m = 3;\ \mathrm{C} = [1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0];$$
$$\mathrm{ПС} = [4\ 4\ 4\ 6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 4\ 4\ 4] = 72;$$
$$N = 16,\ m = 3;\ \mathrm{C} = [1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0];$$
$$\mathrm{ПС} = [4\ 4\ 4\ 6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 4\ 4\ 4] = 78$$

**Рис. 2. Элементы ВПС семейства кодов для базы с $N = 4$, $k_1 = 2$ и $k_2 = 1$**

◆ **Представитель № 3 семейства.** Это кольцевой код с параметрами $N = 6$, $S_3 = 6 \cdot 3 = 18$, $S_3 /2 = 9$. Первый элемент, согласно указанному ранее общему принципу, равен $2 \cdot v = 4$. Остальные два элемента, удовлетворяющие условию $S_3 / 2 = 9$, должны быть равными 4 и 2 с тем, чтобы полусумма ВПС удовлетворяла следующему условию: $S_3 /2 = 4 + 4 + 1 = 9$, а это, в свою очередь, соответствует экспериментальным данным. Последний с нечетным номером элемент 2 делится пополам, давая в результате единицу $(2 : 2) = 1$.

◆ **Представитель № 5 семейства.** Данный кольцевой код имеет следующие параметры: $N = 8$, $S_5 = 5 \cdot 6 = 30$, а $S_5 /2 = 15$. Длина ВПС равна $N - 1 = 8 - 1 = 7$. Чтобы удовлетворить условию относительно $S_5 /2$, значения и размещение отдельных элементов ВПС должны быть следующими: $S_5 /2 = 4 + 4 + 4 + 3 = 15$. Последний элемент равен половине произведения $2 \cdot m = 6$. Из этого следует, что на пятом представителе данного семейства ВПС достигает «насыщения» («коматозного» состояния), и далее при увеличении номера представителя и длины $N$ исходной последовательности на единицу к числу элементов ВПС прибавляется один элемент со значением $2 \cdot m = 6$. Такое состояние представителей семейства можно назвать *коматозным*, причем оно вполне предсказуемо.

◆ **Предпоследний и последний** — соответственно **представители № 12** и **13**, имеющие при $N = 15$ сумму $S_{15} = 72$ и при $N = 16$ сумму $S_{16} = 78$, порождают ВПС коматозного состояния, отличающихся друг от друга одним элементом со значением 6. При этом ВПС представителя с № 12 имеет в своем составе восемь элементов со значением 6, а представитель с № 13 на один элемент больше, т. е. девять таких элементов. Коматозное состояние в этих случаях охватывает уже соответственно восемь и девять номеров.

◈ Статистический анализ семейства кодов, для которых ***базовый вектор*** имеет параметры $\boldsymbol{N = 5}$, $\boldsymbol{k_1 = 3}$, $\boldsymbol{k_2 = 1}$ (рис. 3), дает следующие результаты. Рассматривается только левая половина ВПС, симметричная и равная его правой половине.

◆ **Базовый исходный вектор** состоит из двух образующих единичных групп ($k_1 = 3$ и $k_2 = 1$), разделенных одним нулевым символом, и порождает кольцевой код, значения всех четырех элементов ВПС которого равны 4, а общая сумма элементов ВПС $S_1 = 2 \cdot 4 = 8$.

◆ **Представитель № 2 семейства.** Это кольцевой код с параметрами $N = 6$, $S_2 = 8 \cdot 2 = 16$, $S_2 /2 = 8$. Первый элемент ВПС, как всегда, равен $2 \cdot v = 4$. А поскольку $S_2 /2 = 8$, то для того, чтобы удовлетворить этому соотношению, каждый из двух остальных элементов ВПС должен быть равен 2.

◆ **Представитель № 3.** Кольцевой код с параметрами $N = 7$, $S_3 = 8 \cdot 3 = 24$, $S_3 /2 = 12$. Первый элемент, согласно общему принципу, равен $2 \cdot v = 4$. Остальные два элемента с целью выполнения условия $S_3 /2 = 12$ также должны быть равны 4, т. е. $S_3 /2 = 4 + 4 + 4 = 12$, что соответствует экспериментальным данным рис. 3.

**Семейство 2**

$$\mathbf{N=5,\ m=4;\ C=\Big[\overbrace{1\ 1\ 1}^{k_1}0\ \overbrace{1}^{k_2}\Big];}$$
$$\mathbf{ПС=[2\ 2\ 2\ 2]=8;}$$
$$N=6,\ m=4;\ С=[1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0];$$
$$ПС=[4\ 2\ 4\ 2\ 4]=16;$$
$$N=7,\ m=4;\ С=[1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0];$$
$$ПС=[4\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4]=24;$$
$$N=8,\ m=4;\ С=[1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0];$$
$$ПС=[4\ 4\ 6\ 4\ 6\ 4\ 4]=32;$$
$$N=16,\ m=4;\ С=[1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0];$$
$$ПС=[4\ 4\ 6\ 6\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8\ 6\ 6\ 4\ 4]=96;$$
$$N=17,\ m=4;\ С=[1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0];$$
$$ПС=[4\ 4\ 6\ 6\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8\ 6\ 6\ 4\ 4]=104$$

**Рис. 3. ВПС семейства кодов для базы с $N = 5$, $k_1 = 3$, $k_2 = 1$**

◆ **Представитель № 4.** Кольцевой код с параметрами $N = 8$, $S_4 = 32$, $S_4/2 = 16$. Первый элемент в этом семействе, как всегда, равен 4. На остальные три элемента приходится сумма элементов ВПС, равная 12 единицам. Если предположить, что второй элемент также равен 4, то тогда третий элемент должен быть равен 6, а половина среднего элемента с нечетным номером должна составлять 2 (все значение среднего элемента равно 4), откуда $S_4/2 = 4 + 4 + 6 + 2 = 16$.

◆ **Представитель №12.** Кольцевой код с параметрами $N = 16$, $S_{12} = 96$, $S_{12}/2 = 48$. Первый и второй элементы по аналогии с элементами ВПС более ранних представителей семейства выберем равными четырем единицам. Состояние ВПС, характеризуемое «насыщением» («коматозное» состояние), при котором каждый очередной добавляемый элемент его будет равен $2 \cdot m = 8$, возникает с появлением представителя данного семейства под № 7. Это вариант ВПС кольцевого кода, когда после двух четверок следуют элементы со значениями 6. Далее для всех последующих представителей данного семейства в соответствующие им ВПС включаются только элементы, равные $2 \cdot m = 8$.

◆ **Представитель № 17.** Кольцевой код при $N = 17$, $S_{17} = 104$. Из предыдущих рассуждений вытекает, что вид ВПС почти полностью совпадает с видом ВПС предыдущего представителя (с той лишь разницей, что в среднюю часть ВПС добавляется очередная восьмерка).

◈ Рассмотрим семейство специальных кодов (рис. 4), для которых ***базовый исходный вектор*** состоит из двух образующих единичных групп $\boldsymbol{k_1 = 3}$ и $\boldsymbol{k_2 = 2}$, разделенных одним нулевым символом. При этом все пять ($N - 1 = 5$) компонентов ВПС равны одному и тому же числу 2, а общая сумма всех компонентов ВПС $S_1 = 2 \cdot 5 = 10$.

**Семейство 3**

$$\mathbf{N=6,\ m=5;\ C=\Big[\overbrace{1\ 1\ 1}^{k_1}\ 0\ \overbrace{1\ 1}^{k_2}\Big];}$$
$$\mathbf{ПС=[2\ 2\ 2\ 2\ 2]=10;}$$
$$N=7,\ m=5;\ С=[1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0];$$
$$ПС=[4\ 4\ 2\ 2\ 4\ 4]=20;$$
$$N=8,\ m=5;\ С=[1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0];$$
$$ПС=[4\ 6\ 4\ 2\ 4\ 6\ 4]=30;$$
$$N=9,\ m=5;\ С=[1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0];$$
$$ПС=[4\ 6\ 6\ 4\ 4\ 6\ 6\ 4]=40;$$
$$N=17,\ m=5;\ С=[1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0];$$
$$ПС=[4\ 6\ 6\ 6\ 8\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 8\ 6\ 6\ 6\ 4]=120;$$
$$N=18,\ m=5;\ С=[1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0];$$
$$ПС=[4\ 6\ 6\ 6\ 8\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 8\ 6\ 6\ 6\ 4]=130$$

**Рис. 4. ВПС семейства специальных кодов для базы с $N = 6$, $k_1 = 3$, $k_2 = 2$**

◆ **Представитель № 2.** Кольцевой код с параметрами $N = 7$, $S_2 = S_1 \cdot 2 = 20$, $S_2 /2 = 10$, что подтверждается и экспериментом. Первый элемент ВПС, как уже отмечалось, имеет значение $2 \cdot v = 4$. А поскольку должно выполняться равенство $S_2 /2 = 10$, то два других элемента ВПС должны иметь значения 4 и 2, давая в сумме 6, что и подтверждается экспериментом.

◆ **Представитель № 3.** Это кольцевой код с параметрами $N = 8$, $S_3 = 3 \cdot 10 = 30$, $S_3 /2 = 15$. Первый элемент согласно указанному ранее общему принципу определяется как произведение $2 \cdot v = 4$. Остальные два с половиной элемента для того, чтобы удовлетворить условию $S_3 /2 = 15$, должны в сумме дать число 11. По общему правилу второй элемент ВПС должен превысить первый на две единицы и быть равным числу 6. Тогда разность $11 - 6 = 5$ повлечет за собой элементы ВПС 4 и 1. Единица является центром симметрии ВПС и должна быть удвоена. Окончательно находим слагаемые — элементы полусуммы ВПС: $4 + 6 + 4 + 1 = 15$, что соответствует результатам эксперимента рис. 4.

◆ **Представитель № 4.** Кольцевой код с параметрами $N = 9$, $S_4 = 4 \cdot 10 = 40$, $S_4 /2 = 20$. Первый и второй элементы были получены ранее для предыдущего представителя семейства и оказались равными 4 и 6. Остальные два элемента полусуммы ВПС при сложении должны также дать 10. Но второй элемент в кольцевых кодах рассматриваемого семейства должен повторяться, с учетом чего элементы первой половины ВПС создают конфигурацию, представленную слагаемыми следующего вида: $S_4 /2 = 4 + 6 + 6 + 4 = 20$. Последний средний элемент равен $8 : 2 = 4$. Статистические наблюдения показывают, что четвертый элемент ВПС через одно значение $N$ обычно состоит из двух одинаковых симметричных половин.

◆ **Представитель № 12.** Кольцевой код с параметрами $N = 17$, $S_{12} = 12 \cdot 10 = 120$ и $S_{12} /2 = 60$. Анализируя половинные суммы ВПС очередных представителей данного семейства, приходим к заключению, что **представитель с № 5** нарастит половинную часть элементов ВПС еще одной шестеркой, чтобы дать элементы, представленные слагаемыми суммы $S_{12} /2 = 4 + 6 + 6 + 6 + 3 = 25$. **Представитель с № 6** уже потребует дополнительный элемент, равный 8, для удовлетворения условию $S_6 /2 = 4 + 6 + 6 + 6 + 8 = 30$, после чего наступит насыщение («коматозное» состояние) представителей данного семейства. Начиная с **представителя под № 7**, наблюдаем такую картину: требуемая полусумма достигается для элементов, последний из которых равен предельному значению $2 \cdot m$=10. При этом $S_7 /2 = 4 + 6 + 6 + 6 + 8 + 5 = 35$.

Указанные предельные элементы вида $2 \cdot m$ в дальнейшем начинают повторяться при возрастании порядкового номера представителя семейства, что можно увидеть на примере ВПС представителя с $N = 12$ (см. рис. 4).

◆ **Представитель № 13,** у которого при $N = 18$ значение $S_{13} = 130$. Очевидно, конструкция ВПС будет почти такой же, как и у предыдущего представителя под № 12, за исключением того, что в среднюю часть ВПС добавляется очередная восьмерка.

◈ ***Базовый кольцевой код*** порождается исходным вектором, состоящим из двух единичных групп $\boldsymbol{k_1 = 4}$ и $\boldsymbol{k_2 = 1}$, разделенных одним нулевым символом (рис. 5).

Соответствующий ВПС состоит из пяти одинаковых компонентов, равных 2. Сумма этих элементов $S_1 = 2 \cdot 5 = 10$, поскольку их число на единицу меньше длины $N$ исходной образующей последовательности, а $N - 1 = 5$.

**Семейство 4**

$$\boldsymbol{N = 6,\ \ m = 5;\ \mathrm{C} = \left[\overbrace{1\ 1\ 1\ 1}^{k_1}\ 0\ \overbrace{1}^{k_2}\right];}$$

$$\boldsymbol{\text{ПС} = [2\ 2\ 2\ 2\ 2] = 10;}$$

$$N = 7,\ \ m = 5;\ \mathrm{C} = [1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0];$$

$$\text{ПС} = [4\ 2\ 4\ 4\ 2\ 4] = 20;$$

$$N = 8,\ \ m = 5;\ \mathrm{C} = [1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0];$$

$$\text{ПС} = [4\ 4\ 4\ 6\ 4\ 4\ 4] = 30;$$

$$N = 9,\ \ m = 5;\ \mathrm{C} = [1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0];$$

$$\text{ПС} = [4\ 4\ 6\ 6\ 6\ 6\ 4\ 4] = 40;$$

$$N = 17,\ m = 5;\ \mathrm{C} = [1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0];$$

$$\text{ПС} = [4\ 4\ 6\ 8\ 8\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 8\ 8\ 6\ 4\ 4] = 120;$$

$$N = 18,\ m = 5;\ \mathrm{C} = [1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0];$$

$$\text{ПС} = [4\ 4\ 6\ 8\ 8\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 8\ 8\ 6\ 4\ 4] = 130$$

**Рис. 5. ВПС семейства особых кодов для базы с $N = 6$, $k_1 = 4$, $k_2 = 1$**

◆ **Представитель № 2.** Его параметры: $N = 7$, $S_2 = S_1 \cdot 2 = 20$, $S_2/2 = 10$, что подтверждается экспериментом. Первый элемент ВПС определяется как $2 \cdot v = 4$. А чтобы выполнялось равенство $S_2/2 = 10$, два других элемента ВПС должны иметь значения 4 и 2, давая в сумме 6. Особенность этого представителя — расположение второго и третьего элементов ВПС, в результате которого $S_2/2 = 4 + 2 + 4$ (имеется четная симметрия относительно середины трех элементов левой и правой половины ВПС), а не $S_2/2 = 4 + 4 + 2$, как это можно было бы ожидать, хотя в обоих случаях сумма этих элементов равна 10.

◆ **Представитель № 3.** Его параметры: $N = 8$, $S_3 = 3 \cdot 10 = 30$, $S_3/2 = 15$. Первый элемент, как и ранее, равен $2 \cdot v = 4$. Остальные два с половиной элемента для выполнения условия $S_3/2 = 15$ должны в сумме дать 11. Это достигается таким набором $4 + 4 + 4 + 3 = 15$.

◆ **Представитель № 4.** Его параметры: $N = 9$, $S_4 = 4 \cdot 10 = 40$, $S_4/2 = 20$. Первый и второй элементы были найдены для предыдущего представителя семейства и оказались равными (4 и 4). Оставшиеся два элемента первой половины ВПС должны быть такими, чтобы в сумме дать 12, пребывая в пределах от 4 до 8. Следовательно, это 6 и 6, что и наблюдается в эксперименте.

◆ **Представители № 5, 6, 7** и **12** с параметрами $N = 17$, $S_{12} = 12 \cdot 10 = 120$, $S_{12}/2 = 60$. Анализируя половинные суммы ВПС очередных представителей данного семейства, приходим к выводу, что представитель № 5 при $N = 10$ увеличит половину элементов ВПС на еще одну шестерку, чтобы выполнялось равенство $S_5/2 = 4 + 4 + 6 + 8 + 3 = 25$. Представитель № 6 при $N = 11$ обеспечивает полусумму ВПС с такими слагаемыми: $4 + 4 + 6 + 8 = 30$. Далее наступает насыщение, а именно: для представителя № 7 при $N = 12$, имеем $S_7/2 = 4 + 4 + 6 + 8 + 8 + 5 = 35$; для представителя № 8 при $N = 13$, $S_8/2 = 4 + 4 + 6 + 8 + 8 + 10 = 40$. Здесь последнее слагаемое достигает предельного значения, равного $2 \cdot m = 10$. Далее эти предельные значения начинают повторяться с возрастанием порядкового номера представителя семейства, что легко увидеть на примере ВПС представителя № 12 (см. рис. 5).

◆ **Представитель № 13.** Его параметры: $N = 18$ и $S_{13} = 130$.

Как и следовало ожидать, вид ВПС будет почти такой же, как и предыдущего представителя, с тем лишь отличием, что в среднюю часть ВПС включаются очередные элементы, значения которых равно 10.

◈ ***Базовый кольцевой код*** (рис. 6) создается при помощи исходного вектора, состоящего из двух образующих единичных групп $\boldsymbol{k_1 = 4}$ и $\boldsymbol{k_2 = 2}$, разделенных одним нулевым символом. При этом все шесть ($N - 1 = 7 - 1 = 6$) элементов ВПС равны 2, а их сумма $S_1 = 2 \cdot 6 = 12$.

◆ **Представитель № 2.** Его параметры: $N = 8$, $S_2 = \mathrm{S}_1 \cdot 2 = 24$, $S_2/2 = 12$, что подтверждается экспериментом.

Первый элемент ВПС, как и следовало ожидать, имеет вид $2 \cdot v = 4$. Поскольку $S_2/2 = 12$, то остальные элементы первой половины ВПС должны соответствовать следующим слагаемым указанной полусуммы: $4 + 4 + 2 + 2 = 12$. Второй элемент ВПС должен быть не менее предыдущего элемента, а значит, быть таким же, как и первый элемент. Средний (четвертый) элемент ВПС должен дополнять полусумму до значения 12, а это может быть только число $4/2 = 2$ (см. рис. 6).

◆ **Представитель № 3.** Его параметры: $N = 9$, $S_3 = 3 \cdot 12 = 36$ и $S_3/2 = 18$.

Первый элемент равен $2 \cdot v = 4$. Остальные два с половиной элемента, чтобы выполнить условие $S_3/2 = 18$, должны в сумме дать число 18.

**Семейство 5**

$$\boldsymbol{N = 7,\ m = 6;\ \mathrm{C} = [1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1];}$$
$$\boldsymbol{\mathrm{ПС} = [2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2] = 12;}$$
$$N = 8,\ m = 6;\ \mathrm{C} = [1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0];$$
$$\mathrm{ПС} = [4\ 4\ 2\ 4\ 2\ 4\ 4] = 24;$$
$$N = 9,\ m = 6;\ \mathrm{C} = [1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0];$$
$$\mathrm{ПС} = [4\ 6\ 4\ 4\ 4\ 4\ 6\ 4] = 36;$$
$$N = 10,\ m = 6;\ \mathrm{C} = [1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0];$$
$$\mathrm{ПС} = [4\ 6\ 6\ 6\ 4\ 6\ 6\ 6\ 4] = 48;$$
$$N = 19,\ m = 6;\ \mathrm{C} = [1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0];$$
$$\mathrm{ПС} = [4\ 6\ 6\ 8\ 8\ 10\ 12\ 12\ 12\ 12\ 12\ 12\ 10\ 8\ 8\ 6\ 6\ 4] = 156;$$
$$N = 20,\ m = 6;\ \mathrm{C} = [1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0];$$
$$\mathrm{ПС} = [4\ 6\ 6\ 8\ 8\ 10\ 12\ 12\ 12\ 12\ 12\ 12\ 12\ 10\ 8\ 8\ 6\ 6\ 4] = 168$$

**Рис. 6. ВПС семейства специальных кодов для базы с $N = 7$, $k_1 = 4$, $k_2 = 2$**

Это может достигаться при наличии таких слагаемых (одинаковых для правой и левой половин ВПС): $S_3/2 = 4 + 6 + 4 + 4 = 18$.

◆ **Представитель № 4.** Его параметры: $N = 10$, $S_4 = 4 \cdot 12 = 48$, $S_4/2 = 24$. Первый и второй элементы, найденные для предыдущего представителя, здесь также равны 4 и 6. Остальные три элемента половины ВПС должны дать в сумме число $24 - 10 = 14$ и находиться в пределах от 4 до 8. Следовательно, два из них должны быть равны 6, а еще одно 4, Окончательно имеем: $S_4/2 = 4 + 6 + 6 + 6 + 2 = 18$ (последний средний элемент равен 4, а здесь используется его половина).

◆ **Представители № 6–9** при $N = 12, 13, 14, 15$. Поскольку первые пять элементов ВПС всех этих представителей повторяются, то имеет смысл привести их рядом, представив в виде слагаемых полусумм. У представителей № 4 и 5 происходит замена значения 8 шестого элемента значением 10 без дальнейшей замены. Ко всем следующим представителям добавляется новый элемент, равный $2 \cdot m = 12$.

$$№6:\ N=12,\ (S_6/2)=4+6+6+8+8+4=36;$$
$$№7:\ N=13,\ (S_7/2)=4+6+6+8+8+10=42;$$
$$№8:\ N=14,\ (S_8/2)=4+6+6+8+8+10+6=48;$$
$$№9:\ N=15,\ (S_9/2)=4+6+6+8+8+10+12=54.$$

◆ **Представители № 13 и 14** при $N=19$ и $N = 20$ по структуре ВПС подобны представителю № 9 с той лишь разницей что ВПС представителя № 13 имеет в своем составе шесть элементов со значением $2 \cdot m = 12$, а представителя № 14 семь таких же элементов.

◈ ***Базовый кольцевой код***, порожденный исходным вектором, состоит из двух образующих единичных групп (**$k_1 = 4$ и $k_2 = 3$**), разделенных одним нулевым символом (рис. 7). Соответствующий ВПС состоит из семи элементов, каждый из которых равен 2. Сумма элементов ВПС $S_1 = 2 \cdot 7 = 14$.

◆ **Представитель № 2.** Его параметры: $N = 9$, $S_2 = S_1 \cdot 2 = 28$, $S_2/2 = 14$.

Первый элемент ВПС, должен иметь значение $2 \cdot v = 4$. Поскольку $S_2/2 = 14$, то чтобы удовлетворить этому равенству, остальные элементы первой половины ВПС должны иметь значения таких слагаемых указанной суммы: $4 + 4 + 4 + 2 = 14$. Второй элемент ВПС должен быть не меньше первого, а средний (четвертый) элемент ВПС должен обеспечить равенство полусуммы значению 14, а это может быть только 4. Окончательно имеем: $4 + 4 + 4 + 2 = 14$ (с учетом указанного порядка слагаемых).

◆ **Представитель № 3.** Его параметры: $N = 10$, $S_3 = 3 \cdot 14 = 42$, откуда $S_3/2 = 21$.

Первый элемент, как всегда, равен $2 \cdot v = 4$. Остальные три с половиной элемента с целью выполнения условия $S_3/2 = 21$ должны в сумме давать 21. Это возможно при таких слагаемых (одинаковых для правой и левой половин ВПС): $4 + 6 + 6 + 4 + 1 = 21$.

◆ **Представитель № 4.** Его параметры: $N = 11$, $S_4 = 4 \cdot 14 = 56$ и $S_4/2 = 28$.

Первый и второй элементы те же, что и у предыдущего представителя семейства, а именно: 4 и 6. Третий элемент может быть на две единицы больше второго и равняться числу 8. Оставшиеся два элемента первой половины ВПС должны быть такими, чтобы в сумме получалось число 10. Их значения должны находиться в пределах от 4 до 6 и, следовательно, быть равными 6 и 4, что и показывает эксперимент. Таким образом, элементы первой половины ВПС, а также их размещение соответствуют слагаемым следующей суммы: $4 + 6 + 8 + 6 + 4 = 28$.

***Остановимся на структуре ВПС представителей*** **№ 5–8** (рис. 8) и **№ 9–12** (рис. 9).

◆ **Представители № 5, 6, 7, 8** при $N = 12, 13, 14, 15$ (см. рис. 8), в которых $S_5/2 = 35$, $S_6/2 = 42$,

**Семейство 6**

$$\mathbf{N=8,\ m=7;\ C=[1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1];}$$
$$\mathbf{ПС=[2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2]=14;}$$
$$N=9,\ m=7;\ C=[1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0];$$
$$ПС=[4\ 4\ 4\ 2\ 2\ 4\ 4\ 4]=28;$$
$$N=10,\ m=7;\ C=[1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0];$$
$$ПС=[4\ 6\ 6\ 4\ 2\ 4\ 6\ 6\ 4]=42;$$
$$N=11,\ m=7;\ C=[1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0];$$
$$ПС=[4\ 6\ 8\ 6\ 4\ 4\ 6\ 8\ 6\ 4]=56;$$
$$N=21,\ m=7;\ C=[1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0];$$
$$ПС=[4\ 6\ 8\ 8\ 8\ 10\ 12\ 14\ 14\ 14\ 14\ 14\ 14\ 12\ 10\ 8\ 8\ 8\ 6\ 4]=196;$$
$$N=22,\ m=7;\ C=[1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0];$$
$$ПС=[4\ 6\ 8\ 8\ 8\ 10\ 12\ 14\ 14\ 14\ 14\ 14\ 14\ 14\ 12\ 10\ 8\ 8\ 8\ 6\ 4]=210$$

**Рис. 7. ВПС семейства специальных кодов для базы с $N=8$, $k_1=4$, $k_2=3$**

$S_7/2 = 49$ и $S_8/2 = 56$. В каждом очередном представителе семейства полусумма коэффициентов ВПС увеличивается на одно и то же число, равное 7.

Характерно, что возрастание элементов ВПС (см. рис. 8) начинается с появлением значения 8, которое по мере возрастания длины $N$ кольцевого кода переходит в шестой элемент, равный 10, а далее — в седьмой элемент со значением, равным 12, и, наконец, в восьмой элемент при длине кольцевого кода $N = 15$.

**2.** Базовый исходный вектор в начале и в конце непременно имеет единичные символы.

**3.** Базовый вектор является родоначальником семейства кольцевых кодов особого вида, класса, представители которого получаются добавлением в конце исходного вектора произвольного числа нулевых символов.

**4.** Исходный вектор обладает свойством четности: повернув его символы на 180°, мы получим абсолютно аналогичный исходный вектор, порождающий аналогичный ВПС.

$$\text{№}5: N{=}12,\ m=7,\ \text{C}=[1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0];$$
$$\text{ПС}=[4\ 6\ 8\ 8\ 6\ 3]=35;$$
$$\text{№}6: N{=}13,\ m=7,\ \text{C}=[1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0];$$
$$\text{ПС}=[4\ 6\ 8\ 8\ 8\ 8]=42;$$
$$\text{№}7: N{=}14,\ m=7,\ \text{C}=[1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0];$$
$$\text{ПС}=[4\ 6\ 8\ 8\ 8\ 10\ 5]=49;$$
$$\text{№}8: N{=}15,\ m=7,\ \text{C}=[1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0];$$
$$\text{ПС}=[4\ 6\ 8\ 8\ 8\ 10\ 12]=56$$

**Рис. 8. ВПС семейства особых кодов для базы с $N = 8$, $k_1 = 4$, $k_2 = 3$**

$$\text{№}9: N=16,\ m=7,\ \text{C}=[1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0];$$
$$\text{ПС}=[4\ 6\ 8\ 8\ 8\ 10\ 12\ 7]=63;$$
$$\text{№}10: N=17,\ m=7,\ \text{C}=[1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0];$$
$$\text{ПС}=[4\ 6\ 8\ 8\ 8\ 10\ 12\ 14]=70;$$
$$\text{№}11: N=18,\ m=7,\ \text{C}=[1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0];$$
$$\text{ПС}=[4\ 6\ 8\ 8\ 8\ 10\ 12\ 14\ 7]=77;$$
$$\text{№}12: N=19,\ m=7,\ \text{C}=[1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0];$$
$$\text{ПС}=[4\ 6\ 8\ 8\ 8\ 10\ 12\ 14\ 14]=84$$

**Рис. 9. ВПС семейства особых кодов для базы с $N = 8$, $k_1 = 4$, $k_2 = 3$**

Коматозное состояние ВПС, как следует из рис. 9, начинается с **представителя № 9** при длине кольцевого кода $N = 16$, после чего ВПС очередных представителей с увеличением номера на единицу увеличивается на один элемент со значением $2 \cdot m = 14$. Изменение длины кольцевого кода при этом и наращивание ВПС могут производиться до произвольного значения длины кольцевого кода. Отсюда следует, что идентификаторами особых кольцевых кодов могут служить параметры $k_1$, $k_2$, $N$ и некоторые подсказки относительно величины и размещения определенных их элементов, если это нужно.

### *Результаты статистического анализа кольцевых кодов особого вида*

**1.** К кольцевым кодам особого вида относятся коды, образованные исходной двоичной последовательностью (исходным вектором), состоящей из двух сплошных групп двоичных символов (единиц или нулей), разделенных символом противоположного знака. Образованный этим вектором кольцевой код вместе с порождаемым им ВПС является базовым.

**5.** Векторы ПС одного семейства кольцевых кодов легко вычислить на основании их параметров, таких как длина двух образующих групп $k_1$ и $k_2$, а также общая длина $N$ исходного вектора выбранного представителя данного семейства.

**6.** ВПС длиной $N$ базового кольцевого кода состоит из одинаковых и равных 2 компонентов, число которых равно $N - 1$, а сумма этих компонентов определяется как $S = 2 \cdot (N - 1)$.

**7.** ВПС кольцевых кодов особого вида, как и всех других кольцевых кодов, состоит из двух центрально-симметричных одинаковых наборов элементов.

**8.** Первый элемент любого представителя семейства указанного класса равен удвоенному числу $v$ подряд идущих групп в его составе. Поэтому достаточно найти значения и порядок следования первой половины элементов ВПС (кроме первого).

**9.** Второй и последующие элементы ВПС могут оставаться такими же, как и первый, либо возрастать на две единицы.

**10.** Сумма $S_n$ элементов $n$-го представителя данного семейства кольцевых кодов определяется так: $S_n = n \cdot S_1$, где $S_1$ — сумма элементов ВПС базового кольцевого кода.

На практике благодаря симметрии размещения элементов ВПС достаточно знать только значение $S_n/2$, а так как эта сумма всегда четная, то лишь $S_n/4$.

**11.** По способу размещения и значениям элементов ВПС предшествующего представителя семейства вместе с их общей суммой легко определить вид и размещение элементов следующего представителя того же семейства.

**12.** Формирование структуры элементов ВПС представителей семейства кольцевых кодов особого вида подразделяется на два этапа: этап настройки и этап установившегося процесса («коматозное» состояние элементов ВПС).

**13.** На этапе настройки элементы ВПС для двух соседних представителей одного и того же семейства могут изменяться, возрастая на две единицы до тех пор, пока не достигнут своего предельного значения, равного $2 \cdot m$ либо оставаться неизменными.

**14.** До достижения номера кольцевого кода, при котором оканчивается переходной процесс (процесс насыщения), элементы ВПС (кроме первого) с одинаковыми номерами могут разниться на две единицы. Критерием этого различия является общая сумма элементов ВПС представителя семейства.

**15.** После завершения переходного процесса структура ВПС всех последующих представителей семейства сохраняется неизменной. При этом ВПС любого представителя с установившемся (коматозным) состоянием элементов имеет такое количество их со значением $2 \cdot m$, на сколько его порядковый номер $n$ отличается от номера представителя, на котором переходной процесс для данного семейства окончился.

**16.** Число представителей любого семейства кольцевых кодов особого вида является неопределенным и может задаваться по требованию. Поэтому такие кольцевые коды удобно использовать в качестве идентификаторов либо спецификаторов информации особого назначения, которую может передавать источник и принимать потребитель.

**17.** Идентификаторами представителей особых кольцевых кодов являются их параметры $k_1$, $k_2$, $N$. Можно использовать значения некоторых элементов ВПС, если они заслуживают дополнительного внимания.

**18.** Значения образующих единичных групп можно выбирать по собственным критериям разработчика устройства, но так, чтобы после выбора $k_1$ значение $k_2$ было не меньше единицы и не больше $k_1 - 1$.

**19.** Кольцевые коды особого вида, обладают всеми свойствами остальных кольцевых кодов и, кроме того, позволяют заранее получить любой ВПС с размещением и значениями его элементов.

**20.** Особые свойства данного вида кольцевых кодов в дальнейшем позволят использовать их в качестве цепочных кодов.

**21.** Исходные симметричные векторы с двумя образующими группами при $k_1 = k_2$ обладают всеми описанными свойствами кольцевых кодов особого вида и могут считаться их разновидностью.

### *Литература*


*1. **Блейхут, Р.** Теория и практика кодов, контролирующих ошибки / Р. Блейхут; пер. с англ.— М.: Мир. 1986.— 576 с.*

*2. **Берлекэмп.** Алгебраическая теория кодирования / Берлекэмп; пер. с англ.— М.: Мир. 1971.— 477 с.*

*3. **Мак-Вильямс, Ф. Дж. А.** Теория кодов, исправляющих ошибки / Ф. Дж. А. Мак-Вильямс, Н. Дж. А. Слоэн; пер. с англ.— М.: Связь, 1979.— 744 с.*

*4. **Марков, А. А.** Введение в теорию кодирования / А. А. Марков. — М.: Наука, 1982.— 192 с.*

*5. **Питерсон, У.** Коды, исправляющие ошибки / У. Питерсон, Э. Уэлдон; пер. с англ.— М.: Мир. 1976.— 594 с.*

*6. **Дикарев, А. В.** Постулаты кольцевых кодов / А. В. Дикарев // Зв'язок.— 2013.— № 5.— С. 53–56.*


*О. В. Дікарєв*

**БАЗОВІ КІЛЬЦЕВІ КОДИ ОСОБЛИВОГО ВИДУ**

*Показано, що кожний кільцевий код має «базу», простим додаванням до якої нульових символів можна дістати сімейство (із такою, що прямує до нескінченності, кількістю представників) кільцевих кодів, вектори показників зсуву яких подібні за структурою до базового і різняться лише певною кількістю однакових елементів. Розглянуто варіанти сімейств кільцевих кодів особливого виду, а також досліджено їхні особливості та закономірності, які вони задовольняють.*

**Ключові слова:** кільцевий код; сімейство; представник; базовий вектор.

*A. V. Dikarev*

**THE SPECIAL KIND OF BASE RING CODES**

*It is shown that each ring code has «basis» that can get a family ring codes if we simply add a zero symbols. Vectors of displacement indicators are similar in structure to the base and differ only in a certain quantity of identical elements. Variants of families of the special kind of ring codes are viewed. There were considered some features and regular occurence of ring codes.*

**Keywords:** a ring code; family; the representative; a base vector.