УДК 517.977.13

О. В. НИЖНИК,

Д. М. НЕЛЮБА,

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка

АНАЛІЗ БАГАТОВИМІРНИХ СИСТЕМ ЗА ДОПОМОГОЮ МАСИВУ ВІДНОСНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ ПІДСИЛЕННЯ

Розглянуто можливість застосування масиву відносних коефіцієнтів підсилення для аналізу багатовимірних систем та побудови систем управління з домінантними зв'язками.

Ключові слова: багатовимірні системи; відносні коефіцієнти підсилення; матриця передавальних функцій; канонічне подання.

Вступ

Процеси з лише одним виходом, що перебувають під управлінням однієї керуючої дії, класифікуються як системи з одним входом і одним виходом (SISO — *Single-Input Single-Output*). Утім багато процесів не відповідають такій простій конфігурації управління. В обробній промисловості, наприклад, будь-який функціональний блок виробництва або переробки продукту не може бути керований за допомогою тільки одного контуру управління. Кожний функціональний блок, як правило, потрібно контролювати принаймні за двома змінними, наприклад продуктивністю і якістю продукції. Тому здебільшого існують не менш як два контури управління. Системи з більш ніж одним контуром управління відомі як системи з кількома входами і кількома виходами (MIMO — *Multi-Input Multi-Output*), або багатовимірні системи.

У загальному випадку кожний вхід системи впливає на кожний її вихід. Тому для того, щоб кілька контурів управління успішно функціонували, кожний контур має «знати», що роблять інші. В іншому випадку при спробі досягнення своїх відповідних цілей контури можуть протидіяти один одному. Це явище відоме як ***перехресні зв'язки*** [1].

Якщо перехресні зв'язки не буде враховано при розробці системи управління, вони можуть призвести до нестабільності системи.

Мета цієї статті — спробувати аналітично показати, чому перехресні контури управління небажані.

Розглядається простий підхід до боротьби з перехресними зв'язками: визначення найбільш домінантних пар входів — керованих виходів для управління багатовимірними системами та створення систем керування з домінантними зв'язками.

Аналіз багатовимірних систем

Доступність методів проектування системи управління залежить від наявності лінійних моделей системи, оскільки результуюча схема управління має точно відповідати динаміці процесу. Тому багатовимірна система спочатку моделюється або ***аналітично***, за допомогою системи диференціальних рівнянь, що описують її поведінку, або ***емпірично*** — застосуванням даних, отриманих експериментально, тобто йдеться про побудову моделі структури процесу, або моделювання чорного ящика.

Вочевидь, відповідність отриманої стратегії управління залежить від точності моделі. У випадках, коли характеристики системи досить добре відомі, найчастіше застосовується перший підхід. Прикладом може бути аерокосмічна промисловість, де літаки, космічні кораблі або ракетні системи можна адекватно змоделювати за допомогою рівнянь їхнього руху. У таких випадках моделі подаються переважно у вигляді простору станів [2; 4]. В обробній промисловості, де є високий ступінь невизначеності поведінки процесу, часто використовують для моделювання підхід чорного ящика. Адже для цілей проектування систем управління тієї передавальної функції, яку вдається отримати за допомогою останнього підходу, майже завжди достатньо. Окрім того, існує відповідність між моделями простору станів та передавальними функціями. З огляду на це будемо розглядати лише передавальні функції багатовимірних процесів при розробці та аналізі систем управління.

Зазначимо, що високовимірні системи можна розкласти для спрощення на множину підсистем виміру (2×2), тому будемо розглядати тільки процес (2×2) із двома входами і двома виходами. Візьмемо дві загальні (2×2) моделі входів-виходів багатовимірних систем, відомі як P- і V-канонічні подання (рис. 1) [1].

Різницю між цими двома формами легко побачити з рис. 1: у P-канонічній структурі перехресні зв'язки розглядаються як прямі, тоді як у V-канонічній структурі — як зворотні зв'язки.

Усередині блоків структурних схем позначено передавальні функції, що визначають зв'язки між відповідними парами входу-виходу [1].

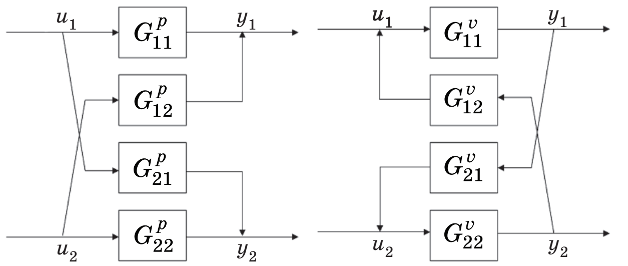

Рис. 1. Моделі входів-виходів систем (2 × 2): Р-канонічна (*а*) і V-канонічна (*б*) форми

Р-канонічне подання

Зв'язок виходів зі входами набирає вигляду

$$y_1 = u_1 G_{11}^p + u_2 G_{12}^p, \tag{1}$$

$$y_2 = u_1 G_{21}^p + u_2 G_{22}^p, \tag{2}$$

де y_i — виходи системи; u_i — керовані входи.

Співвідношення (1) і (2) можуть бути виражені більш компактно в матрично-векторних позначеннях:

$$Y = G^p U, \tag{3}$$

де $Y = [y_1, y_2]^T$; $U = [u_1, u_2]^T$; $G^p = \begin{bmatrix} G_{11}^p & G_{12}^p \\ G_{21}^p & G_{22}^p \end{bmatrix}$.

V-канонічне подання

Це подання багатовимірних систем має такий математичний опис:

$$y_1 = \left\lfloor y_2 G_{12}^v + u_1 \right\rfloor G_{11}^v, \tag{4}$$

$$y_2 = \left\lfloor y_1 G_{21}^v + u_2 \right\rfloor G_{22}^v, \tag{5}$$

або в матрично-векторній нотації:

$$Y = \left[I - G_m^v G_i^v\right]^{-1} G_m^v U, \tag{6}$$

де $G_m^v = \begin{bmatrix} G_{11}^v & 0 \\ 0 & G_{22}^v \end{bmatrix}$; $G_i^v = \begin{bmatrix} 0 & G_{12}^v \\ G_{21}^v & 0 \end{bmatrix}$.

Зв'язок між Р- та V- поданнями

Очевидно, що коли система може бути змодельована з використанням як Р-, так і V- структури, передавальні функції обох структур мають бути зв'язані між собою. Матриця передавальних функцій G^p Р-канонічної форми пов'язана з матрицями передавальних функцій V-канонічної форми такою залежністю:

$$G^p = \left[I - G_m^v G_i^v\right]^{-1} G_m^v. \tag{7}$$

З огляду на існування двох наведених форм моделі процесу постає питання про те, яке подання більш корисне. Не існує жорстких правил здійснення остаточного вибору. І все ж доводиться брати до уваги такі вимоги:

а) має бути змога експериментально визначати параметри моделі;

б) модель має відповідати процесу і водночас бути достатньо загальною, щоб охоплювати інші подібні процеси;

в) модель має надавати відповідну інформацію для проектування систем управління;

г) модель має бути проста.

Розглянемо спершу V-канонічне подання. Дістати елементи матриць передавальних функцій G_m^v і G_i^v поданням одиничної функції на вхід розімкненої системи неможливо, оскільки зміна одного входу буде впливати не тільки на всі виходи, а й на входи також. І все ж передавальні функції, зв'язані з V-канонічною структурою, можуть бути отримані за допомогою методів чисельної ідентифікації [1].

Процеси, як правило, залежать від зовнішніх чинників, таких як зміни навколишнього середовища або умов експлуатації. Для врахування цих ефектів збурення навантаження також мають бути включені в модель. Рівняння V-канонічної моделі можуть бути розширені таким чином:

$$Y = \left\lfloor I - G_m^v G_i^v \right\rfloor \left\lfloor G_m^v U + G_d V \right\rfloor, \tag{8}$$

де $G_d = \begin{bmatrix} G_{d1} & 0 \\ 0 & G_{d2} \end{bmatrix}$; $V = [v_1, v_2]^T$ — вектор збурень.

Включивши збурення навантаження в Р-канонічне подання, дістанемо:

$$Y = G^p U + G_d V. \tag{9}$$

Зауважимо, що в цьому разі кожну пару вхід-вихід визначено однозначно. Таким чином, передавальні функції матриць G^p і G_d у Р-канонічній структурі можуть бути безпосередньо визначені з експериментів при розімкненій системі.

Додаткова перевага Р-канонічного подання полягає в тому, що модель спостережувана і керована. Іншими словами, виходи можуть бути виміряні і входи підлягають контролю.

Отже, Р-канонічна модель прийнятніша, тому будемо використовувати саме її при багатофакторному аналізі систем та синтезі систем управління.

Постановка проблеми зв'язності

Розглянемо два незалежні процеси першого порядку без запізнення, кожний із яких керується пропорційним регулятором. Характеристичні рівняння двох контурів набирають вигляду [1]

$$1 + K_{p1} G_{11} = 0 \text{ і } 1 + K_{p2} G_{22} = 0. \tag{10}$$

Оскільки системи першого порядку при пропорційному управлінні завжди стійкі, то обидва контури залишатимуться стійкими незалежно від значення коефіцієнта підсилення регулятора.

Тепер припустимо, що контури взаємодіють і динаміка взаємодії описується передавальними функціями G_{12} і G_{21} (див. рис. 1, *а*). За допомогою алгебраїчних перетворень можна показати, що стійкість такої системи визначається характеристичним рівнянням

$$(1 + K_{p1} G_{11})(1 + K_{p2} G_{22}) - G_{12} K_{p2} G_{21} K_{p1} = 0. \tag{11}$$

Це рівняння показує, що система буде стійка тільки для діапазону значень коефіцієнтів підсилення пропорційних регуляторів. Таким чином, взаємодія контурів може призвести до нестійкої роботи, якщо її не буде взято до уваги при проектуванні системи управління.

Проблему, що стосується зв'язності контурів управління можна сформулювати формально [8]:

Якщо стійкий стан або динамічне підсилення заданої регульованої змінної змінюється у відповідь на зміну в заданій керуючій змінній, коли інші (початково розімкнені) контури замкнені, то в системі існує зв'язність.

Якщо регулятор контуру був налаштований уручну, то налаштування буде неправильне, коли всі інші контури будуть налаштовані автоматично через їхній вплив на коефіцієнт підсилення цього конкретного контуру управління. Залежно від ступеня взаємодії це призведе до втрати стійкості або принаймні до погіршення характеристик перехідного процесу.

Проблему зв'язності контурів може бути розв'язано завдяки правильному вибору пар входу-виходу, таких що вплив зв'язності буде зведено до мінімуму.

Для розглянутої системи (2×2) це досить просто. Наприклад, якщо u_1 у парі з y_2, то іншою парою, очевидно, є u_2 з y_1. Якщо ці пари не забезпечують необхідної продуктивності, то наступною комбінацією явно є u_1 з y_1 і y_2 з u_2.

Системи більшої розмірності дають більшу кількість можливих комбінацій пар входу-виходу для управління. Наприклад, система розмірності ($n \times n$) має до $n!$ можливих пар входу-виходу. Тому важливо мати змогу кількісно оцінити ступінь взаємодії контурів управління. Ця інформація потім може бути використана для побудови схеми управління з мінімальною зв'язністю. Одна з таких методик — це техніка аналізу відносних коефіцієнтів підсилення.

Масив відносних коефіцієнтів підсилення

Методика відносних коефіцієнтів підсилення використовується не тільки як цінний інструмент добору пар змінних управління, вона також слугує для прогнозування поведінки керованих реакцій [3; 9]. Аналіз будується навколо отримання ***масиву відносних коефіцієнтів підсилення*** (**МВКП**, RGA — *Relative Gain Array*).

Для оцінювання концепції відносних коефіцієнтів підсилення побудуємо МВКП для системи, поданої (2×2) Р-канонічною формою.

Нехай K_{ij} буде коефіцієнтом підсилення відповідної передавальної функції G_{ij}. Якщо при постійному u_i стрибкоподібна зміна входу u_j на Δu_j призводить до зміни на Δy_i виходу y_i, то коефіцієнт підсилення між u_j і y_i визначається за формулою:

$$K_{ij}\Big|_{u_i=\text{const}} = \frac{\Delta y_i}{\Delta u_j}\Big|_{u_i=\text{const}}. \qquad (12)$$

Встановимо тепер константою y_j, замкнувши контур між y_j і u_i. Тоді стрибкоподібна зміна входу u_j на Δu_j призведе до іншої зміни виходу y_i. Коефіцієнт підсилення за цієї сукупності умов визначається так:

$$K_{ij}\Big|_{y_j=\text{const}} = \frac{\Delta y_i}{\Delta u_j}\Big|_{y_j=\text{const}}. \qquad (13)$$

Хоча знайдені коефіцієнти підсилення зв'язують ту саму пару змінних, вони можуть мати різні значення, бо були отримані за різних умов.

Якщо існує зв'язність, то зміна y_i від зміни u_j для цих двох випадків будуть різні. Відношення

$$\lambda_{ij} = \frac{K_{ij}\big|_{u_i=\text{const}}}{K_{ij}\big|_{y_j=\text{const}}}, \qquad (14)$$

де λ_{ij} — безрозмірна величина, визначає відносний коефіцієнт підсилення між виходом y_i і входом u_j та відразу дає таку інформацію:

а) якщо $\lambda_{ij} = 0$, то зміна u_j не впливає на y_i і, отже, цей коефіцієнт не повинен використовуватися для управління y_i;

б) якщо $\lambda_{ij} = 1$, то це означає, що $K_{ij}\big|_{u_i=\text{const}}$ і $K_{ij}\big|_{y_j=\text{const}}$ мають ті самі значення.

Таким чином, за визначенням, коефіцієнт підсилення між виходом y_i і входом u_j не залежить від контуру між y_j і u_i, тобто зв'язності немає.

Матриця елементів λ_{ij} утворює МВКП. Для системи ($n \times n$) вона має вигляд:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (15)$$

Елементи МВКП мають такі властивості:

а) сума елементів кожного стовпця дорівнює одиниці: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n;$

б) сума елементів кожного рядка дорівнює одиниці: $\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$

Описаний спосіб побудови МВКП базується на даних, отриманих під час експериментальних вимірів. Також можливе аналітичне визначення МВКП. Можна показати, що для системи розмірністю ($n \times n$) із матрицею K коефіцієнтів підсилення матриця МВКП може бути обчислена як

$$\Lambda = K \circ \left(K^T\right)^{-1}, \qquad (16)$$

де $\circ$ — оператор, що позначає поелементне множення елементів матриць.

При побудові МВКП можливі такі випадки (для системи (2×2):

1. Якщо $\lambda_{11} = 0$, то МВКП має діагональ із нулів і одиничні недіагональні елементи. Це вказує на те, що управління системою може бути досягнуто тільки через утворення пар y_1 з u_2 і y_2 з u_1. Результуюча система управління при цьому незв'язна.

2. Якщо $\lambda_{11} = 1$, то система складається з незалежних контурів $y_1 - u_1$ і $y_2 - u_2$. При цьому u_1 не може бути використаний для управління y_2, а u_2 не може бути використаний для управління y_1.

3. Якщо $\lambda_{11} = 0,5$, то обидва керованих входи впливають на обидва виходи однаково. Це відображає найгірший випадок — незалежно від того, які пари використовуються, ступінь зв'язності буде однаковий.

4. Якщо $0 < \lambda_{11} < 0,5$, то діагональні елементи МВКП менші за 0,5, а недіагональні елементи — більші. Більші елементи вказують на придатніші пари входу-виходу, а саме: y_1 з u_2 і y_2 з u_1.

5. Якщо $0,5 < \lambda_{11} < 1$, то маємо випадок, протилежний випадку 4: найбільш придатними парами будуть y_2 з u_2 і y_1 з u_1.

6. Якщо $\lambda_{11} > 1$, то недіагональні елементи МВКП будуть від'ємні. Це означає, що зміна y_1 від зміни u_1 зменшується, якщо контур між y_2 і u_2 замкнений. Іншими словами, контрольований перехідний процес стримується впливом іншого контуру. Чим більший відносний коефіцієнт підсилення одиниці, тим вищий цей ефект. Тому зазначені пари входів-виходів потребують використання великих коефіцієнтів підсилення регуляторів. Альтернативні пари y_1 з u_2 і y_2 з u_1 не можуть бути використані, оскільки відповідні відносні коефіцієнти підсилення від'ємні. Це означає, що результуюча взаємодія контурів буде відводити контрольовані виходи в напрямі, протилежному щодо того, якого намагається досягнути управління. Через це управління зрештою втрачається.

Наведені випадки разом із відповідними правилами вибору пар входу-виходу не охоплюють усіх можливих. Строгий аналіз має включати розгляд систем, де кількість входів відрізняється від кількості виходів, або систем із наявними збуреннями.

Знаки коефіцієнтів підсилення моделі процесу — також важливі фактори в аналізі МВКП.

Утім усе ж можна сформулювати загальне правило для вибору контурів управління: контури управління повинні містити пари входів-виходів, які мають додатні відносні коефіцієнти підсилення зі значеннями, якомога ближчими до одиниці.

Використовуючи відносні коефіцієнти підсилення для визначення найкращих пар входу-виходу для багатовимірного управління, дістаємо так звану стратегію управління домінуючої взаємодії. Відомі й інші методи, що спираються, наприклад, на декомпозицію годографа системи, або частотні методи, які також мають на меті досягти мінімальної взаємодії між контурами управління [4–7]. Хоча методи, в основу яких покладено аналіз відносних коефіцієнтів підсилення, зводяться переважно до дослідження статичних характеристик, вони все ж досить популярні через інтуїтивний характер відповідних підходів.

* * *

Сфера застосування багатовимірного управління дуже широка, і ця стаття, природно, не охоплює всіх аспектів цієї теми. Це лише спроба привернути увагу до проблем, які стосуються взаємозв'язаних контурів управління, та наголосити на корисності застосування порівняно простого методу розв'язання цих проблем — побудови системи управління з домінантними зв'язками за допомогою аналізу відносних коефіцієнтів підсилення.

Література

1. **Tham, M. T.** *Multivariable control: an introduction to decoupling control. An Introduction to Decoupling Control / M. T. Tham.— MTT, July 1999.*
2. **Balakrishnan, A. V.** *Elements of State Space Theory of Systems. Optimization Software Inc. / A. V. Balakrishnan.— New York, 1983.*
3. **Bristol, E. H.** *On a new measure of interaction for multivariable process control / E. H. Bristol // IEEE Trans. on Auto. Control.— 1966.— AC-11.— P. 133–134.*
4. **O'Reilly, J.** *[ed.] Multivariable Control for Industrial Applications / J. O'Reilly // IEE Control Engineering Series.— 1987.— Vol. 32, Peter Peregrinus.*
5. **Patel, R. V.** *Multivariable System Theory and Design / R. V. Patel, N. Munro // International Series on Systems and Control.— Pergamon Press, 1982.*
6. **Rjinsdorp, J. E.** *A survey of experimental applications of multivariable control to process control problems / J. E. Rjinsdorp, D. E. Seborg // AIChE Symp. Series on Process Control.— 1979.— Vol. 159, No. 72.*
7. **Schwanke, C. O.** *Development of multivariable control strategies for distillation columns / C. O. Schwanke, T. F. Edgar, J. O. Hougen // ISA Trans.— 1977.— Vol. 16, No. 4.*
8. **Shinskey, F. G.** *Process Control Systems / F. G. Shinskey.— 2nd Ed., McGraw Hill, 1979.*
9. **Shinskey, F. G.** *Predict distillation column response using relative gains. Hydrocarbon Processing / F. G. Shinskey.— May, 1981.*

Рецензент: доктор техн. наук, професор В. А. Краснобаєв, ПолтНТУ імені Юрія Кондратюка.

О. В. Нижник, Д. Н. Нелюба

АНАЛИЗ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ ПРИ ПОМОЩИ МАССИВА ОТНОСИТЕЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ УСИЛЕНИЯ

Рассмотрена возможность применения массива относительных коэффициентов усиления для анализа многомерных систем и построения систем управления с доминантными связями.

Ключевые слова: многомерные системы; относительные коэффициенты усиления; матрица передаточных функций; каноническое представление.

O. V. Nyznyk, D. M. Neliuba

MULTIDIMENSIONAL SYSTEMS ANALYSIS WITH RELATIVE GAIN ARRAY

The article considers the possibility of relative gain array using for multidimensional systems analysis and dominant interaction control systems design.

Keywords: multidimensional system; relative gain array; transfer functions matrix; canonical representation.